AN ESSAY

ON THE

FOUNDATIONS OF GEOMETRY

BY

BERTRAND A. W. RUSSELL, M.A.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

CAMBRIDGE:
AT THE UNIVERSITY PRESS.
1897

[*All Rights reserved.*]

https://OneMoreLibrary.com

Saggio sui fondamenti di

Geometria

Bertrand Russell

Casa editrice universitaria, Cambridge, 1897

I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA.

Londra: CJ CLAY AND SONS,

MAGAZZINO DELLA CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,

AVE MARIA LANE.

Glasgow: 263, ARGYLE STREET.



Lipsia: FA BROCKHAUS.

New York: THE MACMILLAN COMPANY.

Bombay: GEORGE BELL E FIGLI.

ANESS AY

SUL

FONDAMENTI DI GEOMETRIA

DI

BERTRAND AW RUSSELL. MA

MEMBRO DEL TRINITY COLLEGE DI CAMBRIDGE.

CAMBRIDGE:

PRESSO LA CASA EDITRICE UNIVERSITARIA.

1897

[*Tutti i diritti riservati.*]

Cambridge:

STAMPATO DA J. E CF CLAY,

PRESSO LA CASA EDITRICE UNIVERSITARIA.

PREFAZIONE.

La presente opera si basa su una dissertazione presentata all'esame di Fellowship del Trinity College di Cambridge nel 1895. La sezione B del terzo capitolo è in gran parte una ristampa, con alcune modifiche sostanziali, di un articolo apparso su *Mind* (Nuova Serie, n. 17). Il contenuto del libro è stato esposto sotto forma di lezioni tenute alla Johns Hopkins University di Baltimora e al Bryn Mawr College in Pennsylvania.

Il mio principale ringraziamento va al professor Klein. Per tutto il primo capitolo, ho trovato le sue "Lezioni di geometria non euclidea" una guida preziosissima; ho accettato la sua suddivisione della metageometria in tre periodi e ho trovato il mio lavoro storico molto più agevole grazie ai suoi riferimenti ad autori precedenti. In logica, ho imparato molto dal signor Bradley e, subito dopo, da Sigwart e dal dottor Bosanquet. Su diversi punti importanti, ho tratto utili spunti dai "Principi di psicologia" del professor James.

Desidero ringraziare il signor GF Stout e il signor AN Whitehead per aver gentilmente letto le mie bozze e per i numerosi e utili suggerimenti. Al signor Whitehead devo inoltre il suo inestimabile aiuto, grazie alle continue critiche e ai suggerimenti forniti durante tutto il processo di costruzione, soprattutto per quanto riguarda l'importanza filosofica della geometria proiettiva.

H ASLEMERE .

Maggio 1897.

A

JOHN McTAGGART ELLIS McTAGGART

AL CUI DISCORSO E ALLA CUI AMICIZIA SI DEVE L'ESISTENZA DI QUESTO LIBRO.

SOMMARIO.

INTRODUZIONE.

IL NOSTRO PROBLEMA È DEFINITO IN BASE ALLE SUE RELAZIONI CON LA LOGICA, LA PSICOLOGIA E LA MATEMATICA.

PAGINA 1. Il problema ha assunto per la prima volta una forma moderna attraverso Kant, che ha collegato l' *à priori* con il soggettivo 1

2. Uno stato mentale è soggettivo, per la psicologia, quando la sua causa immediata non risiede nel mondo esterno . 2

3. Una conoscenza è *a priori* , per l'epistemologia, 2 quando senza di essa la conoscenza sarebbe impossibile

4. Il soggettivo e l' *à priori* appartengono rispettivamente alla psicologia e all'epistemologia. Solo quest'ultima sarà oggetto di indagine in questo saggio.

5. Il mio test dell'à *priori* sarà puramente logico: cosa

La conoscenza è necessaria per l'esperienza? 3

6. Ma poiché il necessario è ipotetico, dobbiamo

includere, a *priori* , il motivo della necessità 4

7. Questo potrebbe essere il postulato essenziale della nostra scienza, oppure

l'elemento, nell'oggetto in questione, che è

necessario sperimentare; 4

8. Che, tuttavia, sono entrambi in fondo lo stesso terreno 5

9. Previsione del lavoro 5

CAPITOLO I.

BREVE STORIA DELLA METAGEOMETRIA.

10. La metageometria iniziò rifiutando l'assioma di
paralleli 7

11. La sua storia può essere divisa in tre periodi: il
sintetico, metrico e proiettivo 7

12. Il primo periodo fu inaugurato da Gauss, 10

13. I cui suggerimenti sono stati sviluppati indipendentemente da
Lobatchewsky 10

14. E Bolyai 11

15. Lo scopo di tutti e tre era dimostrare che l'assioma di
Non è stato possibile dedurre parallelismi dagli altri, poiché
La sua negazione non ha portato a contraddizioni 12

16. Il secondo periodo aveva uno scopo più filosofico e
fu ispirato principalmente da Gauss e Herbart 13

17. La prima opera di questo periodo, quella di Riemann, inventò
due nuove concezioni: 14

18. La prima, quella di una varietà, è una concezione di classe,
che contiene lo spazio come specie, 14

19. E definito in modo tale che le sue determinazioni formino un 15
raccolta di grandezze

20. La seconda, la misura della curvatura di una varietà,
è nato dalla curvatura nelle curve e nelle superfici 16

21. Per mezzo della formula analitica di Gauss per il
curvatura delle superfici, 19

22. Ciò ci consente di definire una *misura costante* di
curvatura di uno spazio tridimensionale senza
riferimento a una quarta dimensione 20

23. Il risultato principale del lavoro matematico di Riemann fu

per dimostrare che, se le grandezze sono indipendenti dal luogo,
la misura della curvatura dello spazio deve essere costante 21
24. Helmholtz, che era più un filosofo che un
matematico, 22
25. Ha fornito una formulazione nuova ma errata dell'essenziale
assiomi, 23
26. E ha dedotto la formula quadratica per il
arco infinitesimale, che Riemann aveva ipotizzato 24
27. Beltrami diede alla planimetria di Lobatchewsky un'euclidea
interpretazione, 25
28. Che è analoga alla teoria della distanza di Cayley; 26
29. E si è occupato di *spazi n*- dimensionali di costante
curvatura negativa 27
30. Il terzo periodo abbandona i metodi metrici del
in secondo luogo, estrude la nozione di quantità spaziale 27
31. Cayley ha ridotto le proprietà metriche a quelle proiettive
proprietà, relative a una certa conica o quadrica,
Assoluto; 28
32. E Klein ha dimostrato che l'euclideo o il non euclideo
i sistemi risultano, secondo la natura del
Assoluto; 29
33. Quindi *lo spazio* euclideo sembrava dare origine a tutti gli
tipi di geometria e la domanda, quale è vera,
sembrava ridotto a uno della convenzione 30
34. Ma questa visione è dovuta a una confusione circa la natura di 30
le coordinate utilizzate
35. Le coordinate proiettive sono state considerate dipendenti
sulla distanza, e quindi realmente metrico 31
36. Ma questo non è il caso, poiché il rapporto anarmonico può essere

definito proiettivamente 32
37. Le coordinate proiettive, essendo puramente descrittive, possono
non forniscono informazioni sulle proprietà metriche e il
la riduzione delle proprietà metriche in proprietà proiettive è
puramente tecnico 33
38. La vera connessione della misura di distanza di Cayley
con geometria non euclidea è quella suggerita da
Saggio di Beltrami, e elaborato da Sir R. Ball, 36
39. Che fornisce un equivalente euclideo per ogni non-
Proposizione euclidea, e quindi rimuove la
possibilità di contraddizioni in Metageometria 38
40. Non è stato dimostrato che la geometria ellittica di Klein abbia un
corrispondente varietà di spazio 39
41. L'uso geometrico degli immaginari, di cui Cayley
ha richiesto una discussione filosofica, 41
42. Ha una validità meramente tecnica, 42
43. Ed è in grado di fornire risultati geometrici solo quando
Inizia e finisce con punti e cifre reali 45
44. Abbiamo ora visto che la geometria proiettiva è logicamente
precedente alla geometria metrica, ma non può sostituirla 46
45. Sofo Lie ha applicato metodi proiettivi a
La formulazione degli assiomi di Helmholtz, e ha
dimostrato che l'assioma della monodromia è superfluo 46
46. La metageometria è gradualmente cresciuta indipendentemente da
filosofia, ma è cresciuta continuamente di più
interessante per la filosofia 50
47. La geometria metrica ha tre assiomi indispensabili, 50
48. Che scopriremo non essere risultati, ma condizioni, di 51
misurazione,

49. E che sono quasi equivalenti ai tre assiomi di 52
Geometria proiettiva
50. Entrambi gli insiemi di assiomi sono necessari, non dai fatti, ma
per logica 52

CAPITOLO II.
RESOCONTO CRITICO DI ALCUNI PRECEDENTI
TEORIE FILOSOFICHE DELLA GEOMETRIA.
51. Una critica delle teorie moderne rappresentative non è necessaria
iniziare prima di Kant 54
52. La dottrina di Kant deve essere presa in considerazione, in un'argomentazione su
La geometria, dal suo punto di vista puramente logico 55
53. Kant sostiene che poiché la geometria è apodittica, lo spazio
deve essere *a priori* e soggettivo, mentre poiché lo spazio è
A priori e soggettiva, la geometria deve essere apodittica 55
54. La metageometria ha sconvolto la prima linea di argomentazione, non
il secondo 56
55. Il secondo può essere attaccato criticando l'uno o l'altro
distinzione tra giudizi sintetici e analitici, o
i primi due argomenti della metafisica
deduzione dello spazio 57
56. La logica moderna considera ogni giudizio come entrambi
sintetico e analitico, 57
57. Ma lascia l' *à priori* , come ciò che è presupposto in
la possibilità di esperienza 59
58. I primi due argomenti di Kant riguardo allo spazio sono sufficienti a dimostrare
una qualche forma di esternalità, ma non necessariamente
Spazio euclideo, condizione necessaria dell'esperienza 60

59. Tra i successori di Kant, solo Herbart fece progressi
la teoria della geometria, influenzando Riemann 62
60. Riemann considerava lo spazio come un tipo particolare di 63
multiforme, cioè interamente quantitativamente

61. Pertanto, ha trascurato indebitamente l'aspetto qualitativo 64
aggettivi di spazio
62. La sua filosofia si basa su una disgiunzione viziosa 65
63. La sua definizione di varietà è oscura, 66
64. E la sua definizione di misurazione si applica solo a
spazio 67
65. Sebbene matematicamente inestimabile, la sua visione dello spazio
come varietà è filosoficamente fuorviante 69
66. Helmholtz attaccò Kant sia sul piano matematico che su quello matematico.
dal punto di vista psicologico; 70
67. Ma il suo criterio di priorità è mutevole e spesso
non valido; 71
68. La sua prova che gli spazi non euclidei sono immaginabili è
inconcludente; 72
69. E la sua affermazione della dipendenza della misurazione da
corpi rigidi, che possono essere intesi in tre sensi, 74
70. È totalmente falso se significa che l'assioma di
La congruenza in realtà afferma l'esistenza di rigidi
corpi, 75
71. È falso se significa che il riferimento necessario di
proposizioni geometriche sulla materia rendono puro
Geometria empirica, 76
72. E non è adeguato alla sua conclusione se significa, cosa è
vero, che la misurazione *effettiva* comporta

corpi approssimativamente rigidi 78
73. La geometria si occupa di una materia astratta, la cui fisica
le proprietà vengono ignorate; e la fisica deve
presuppone Geometria 80
74. Erdmann accettò le conclusioni di Riemann e
Helmholtz, 81
75. E considerava gli assiomi necessariamente successivi
fasi nella classificazione dello spazio come specie di varietà 82
76. La sua deduzione si basa su quattro presupposti fallaci,
vale a dire: 82

77. Che le concezioni debbano essere astratte da una serie di 83
casi;
78. Che ogni definizione è una classificazione; 83
79. Che i concetti di grandezza possano essere applicati allo spazio
nel complesso; 84
80. E che se le concezioni di grandezza potessero essere così
applicato, tutti gli aggettivi di spazio risulterebbero da
la loro applicazione 86
81. Erdmann ritiene che la geometria da sola sia incapace di
decidere sulla verità dell'assioma di congruenza, 86
82. Che egli afferma essere provato empiricamente da
Meccanica. 88
83. La varietà e l'inadeguatezza dei test di Erdmann
priorità 89
84. Invalidare le sue conclusioni finali sulla teoria di
Geometria 90
85. Lotze ha discusso due questioni nella teoria di
Geometria: 93

86. (1) Egli considera la possibilità di spazi non euclidei
come suggerito dalla soggettività dello spazio, 93
87. E lo rifiuta a causa di un problema matematico
malinteso, 96
88. Avendo perso il senso più importante del loro
possibilità, 96
89. Il che significa che soddisfano le condizioni logiche per cui
qualsiasi forma di esternalità deve essere conforme 97
90. (2) Egli attacca la procedura matematica di
Metageometria 98
91. L'attacco inizia con una definizione che pone domande
paralleli 99
92. Lotze sostiene che tutte le apparenti deviazioni da
Euclide potrebbe essere spiegato fisicamente, una visione che
rende davvero Euclide empirico 99
93. La sua critica alle analogie di Helmholtz si basa interamente su 101
errori matematici
94. La sua prova che lo spazio deve avere tre dimensioni si basa
sulla negligenza di diversi ordini di infinito 104
95. Attacca gli spazi non euclidei per errore
motivo per cui non sono omogenei 107
96. Le obiezioni di Lotze si suddividono in quattro categorie 108
97. Si possono sollevare altre due obiezioni semi-filosofiche, 109
98. Uno dei quali, l'assenza di somiglianza, è stato fatto
la base dell'attacco di Delbœuf, 110
99. Ma non costituisce un valido motivo di obiezione 111
100. Recenti speculazioni francesi sui fondamenti di
La geometria ha suggerito poche nuove prospettive 112
101. Tutti gli spazi omogenei sono *a priori* possibili e il

la decisione tra di loro è empirica 114

CAPITOLO III.

SEZIONE A. GLI ASSIOMI DELLA PROIETTIVA

GEOMETRIA .

102. La geometria proiettiva non si occupa di grandezza e
si applica a tutti gli spazi allo stesso modo 117

103. Si troverà interamente *a priori* 117

104. I suoi assiomi non sono ancora stati formulati
filosoficamente 118

105. Le coordinate, nella geometria proiettiva, non sono spaziali
grandezze, ma nomi convenienti per i punti 118

106. La possibilità di distinguere vari punti è un
assioma 119

107. Le relazioni qualitative tra i punti, trattate da
La geometria proiettiva è presupposta dal 119
trattamento quantitativo

108. L'unica relazione qualitativa tra due punti è la 120
linea retta, e tutte le linee rette sono qualitativamente
simile

109. Ne consegue, per estensione, il principio proiettivo
trasformazione 121

110. Con quali cifre qualitativamente indistinguibili da un
la cifra indicata è 122

111. Il rapporto anarmonico può e deve essere descritto
definito 122

112. La costruzione quadrilatera è essenziale per la
definizione proiettiva dei punti, 123

113. E può essere definito in modo proiettivo, 124
114. Per il principio generale della trasformazione proiettiva 126
115. Il principio di dualità è la forma matematica di un
circolo filosofico, 127
116. Che è una conseguenza inevitabile della relatività di
spazio e rende qualsiasi definizione del punto
contraddittorio 128
117. Definiamo il punto come ciò che è spaziale, ma
non contiene spazio, da cui seguono altre definizioni 128
118. Cosa si intende per equivalenza qualitativa in geometria? 129
119. Due coppie di punti su una linea retta, o due coppie di
le linee rette passanti per un punto sono qualitativamente
equivalente 129
120. Ciò spiega perché *sono necessari quattro* punti collineari, per
fornire una relazione intrinseca mediante la quale il quarto può essere
definito in modo descrittivo quando i primi tre sono dati 130
121. Due figure qualsiasi correlate proiettivamente sono qualitativamente
equivalente, cioè non differisce in alcun aspetto non quantitativo
proprietà concettuale 131
122. Tre assiomi sono utilizzati dalla geometria proiettiva, 132
123. E sono necessari per il confronto spaziale qualitativo, 132
124. Che implica l'omogeneità, la relatività e
passività dello spazio 133

125. La concezione di una forma di esternalità, 134
126. Essendo una creatura dell'intelletto, può essere trattato da
matematica pura 134
127. La dottrina risultante dell'estensione sarà, per il
momento, ipotetico 135

128. Ma è reso assertivo dalla necessità, per esperienza, di qualche forma di esternalità 136
129. Qualsiasi forma di questo tipo deve essere relazionale 136
130. E omogeneo 137
131. E le relazioni che la costituiscono devono apparire infinite divisibile 137
132. Deve avere un numero finito e intero di dimensioni, 139
133. A causa della sua passività e omogeneità 140
134. E all'unità sistematica del mondo 140
135. Una forma unidimensionale da sola non sarebbe sufficiente per esperienza 141
136. Poiché i suoi elementi sarebbero fissati in modo immobile in un serie 142
137. Due posizioni hanno una relazione indipendente dalle altre posizioni, 143
138. Poiché le posizioni sono interamente definite reciprocamente relazioni indipendenti 143
139. Quindi la geometria proiettiva è interamente *a priori* , 146
140. Sebbene la geometria metrica contenga un empirico elemento 146
SEZIONE B. GLI ASSIOMI DELLA METRICA
GEOMETRIA .
141. La geometria metrica è distinta da quella proiettiva, ma ha lo stesso postulato fondamentale 147
142. Introduce la nuova idea di movimento e ha tre *à* 148
assiomi *a priori*
I. *L'assioma della libera mobilità*.
143. La misurazione richiede un criterio di uguaglianza spaziale 149
144. Che è dato dalla sovrapposizione e coinvolge il

assioma della libera mobilità 150
145. La negazione di questo assioma implica un'azione di vuoto
spazio sulle cose 151
146. Esiste un'alternativa matematicamente possibile alla
assioma, 152
147. Il che, tuttavia, è logicamente e filosoficamente
insostenibile 153
148. Sebbene la libera mobilità sia *a priori* , la misurazione effettiva
è empirico 154
149. Rimangono da rispondere ad alcune obiezioni riguardanti : 154
150. (1) Il confronto dei volumi e di Kant
oggetti simmetrici 154
151. (2) La misurazione del tempo, dove la congruenza è
impossibile 156
152. (3) La percezione immediata della grandezza spaziale;
e 157
153. (4) La geometria delle superfici non congruenti 158
154. La libera mobilità include la monodromia di Helmholtz 159
155. La libera mobilità implica la relatività dello spazio 159
156. Da cui, reciprocamente, si può dedurre 160
157. Il nostro assioma è quindi *a priori* in un doppio senso 160
II. *L'assioma delle dimensioni*.
158. Lo spazio deve avere un numero finito e intero di dimensioni 161
159. Ma la restrizione a tre è empirica 162
160. L'assioma generale deriva dalla relatività di
posizione 162
161. La limitazione a tre dimensioni, a differenza della maggior parte 163
la conoscenza empirica è accurata e certa

III. *L'assioma della distanza*.

162. L'assioma della distanza corrisponde, qui, a quello della linea retta nella geometria proiettiva 164

163. La possibilità di misurazione spaziale implica un grandezza determinata univocamente da due punti, 164

164. Poiché due punti devono avere una qualche relazione, e il la passività dello spazio dimostra che ciò è indipendente da riferimento esterno 165

165. Può esistere una sola relazione di questo tipo 166

166. Ciò deve essere misurato da una curva che unisce i due punti, 166

167. E la curva deve essere determinata in modo univoco dai due punti 167

168. La geometria sferica contiene un'eccezione a questa regola. assioma, 168

169. Il che, tuttavia, non è del tutto equivalente al 168

170. L'eccezione è dovuta al fatto che due punti, in spazio sferico, può avere una relazione esterna inalterato dal movimento, 169

171. Che, tuttavia, essendo una relazione di grandezza lineare, presuppone la possibilità di grandezza lineare 170

172. Una relazione tra due punti deve essere una linea che unisce loro 170

173. Viceversa, l'esistenza di una linea unica tra due i punti possono essere dedotti dalla natura di una forma di esternalità, 171

174. E porta necessariamente alla distanza, quando la quantità è applicato ad esso 172

175. Quindi anche l'assioma della distanza è *a priori* in un

doppio senso 172

176. Nessun sistema di coordinate metriche può essere impostato senza 174
la linea retta
177. Non sono necessari altri assiomi oltre ai tre sopra indicati per
Geometria metrica 175
178. Ma questi tre sono necessari per la misurazione diretta
di qualsiasi continuum 176
179. Rimangono due questioni filosofiche per il capitolo finale 177

CAPITOLO IV.
CONSEGUENZE FILOSOFICHE.
180. Qual è la relazione con l'esperienza di una forma di
esternalità in generale? 178
181. Questa forma è la concezione di classe, contenente ogni
possibile intuizione dell'esternalità; e alcuni di questi
l'intuizione è necessaria per fare esperienza 178
182. Che relazione intercorre tra questa visione e quella di Kant? 179
183. È meno psicologico, poiché non discute
se lo spazio è dato nella sensazione, 180
184. E sostiene che non solo lo spazio, ma qualsiasi forma di
esternalità che rende possibile l'esperienza, deve
essere dato nella percezione sensoriale 181
185. Esternalità non dovrebbe significare esternalità al Sé, ma
l'esternalità reciproca delle cose presentate 181
186. Sarebbe inconoscibile senza una data forma di
esternalità? 182
187. Bradley ha dimostrato che lo spazio e il tempo escludono la
esistenza di meri particolari, 182

188. E tale conoscenza richiede che *ciò* non sia
semplice né autosufficiente 183
189. Per dimostrare che l'esperienza richiede una forma di esternalità,
Presumo che ogni conoscenza richieda il riconoscimento
dell'identità nella differenza 184

190. Tale riconoscimento richiede tempo 184
191. E qualche altra forma che dia diversità simultanea 185
192. L'argomentazione di cui sopra non ha dedotto la percezione sensoriale.
dalle categorie, ma ha mostrato il primo,
a meno che non contenga un certo elemento, essere
incomprensibile a quest'ultimo 186
193. Come spiegare la realizzazione di questo elemento, è un
domanda per la metafisica 187
194. Che cosa dobbiamo fare con le contraddizioni nello spazio? 188
195. Di seguito verranno discusse tre contraddizioni 188
196. (1) L'antinomia del Punto dimostra la relatività di
spazio, 189
197. E mostra che la geometria deve avere qualche riferimento a
materia, 190
198. Con il quale si fa riferimento all'ordine spaziale, non
nello spazio vuoto 191
199. Le proprietà causali della materia sono irrilevanti per
Geometria, che deve considerarla come composta da
atomi non estesi, con i quali i punti vengono sostituiti 191
200. (2) Il cerchio nella definizione di linee rette e piani è
superato dallo stesso riferimento alla questione 192
201. (3) L'antinomia secondo cui lo spazio è relazionale e tuttavia di più
che relazionale, 193

202. Sembra dipendere dalla confusione dello spazio vuoto con
ordine spaziale 193
203. Kant considerava lo spazio vuoto come l'oggetto di studio
Geometria, 194
204. Ma gli argomenti dell'estetica sono inconcludenti su
questo punto, 195
205. E sono turbati dalle antinomie matematiche, che
dimostrare che l'ordine spaziale dovrebbe essere l'oggetto di studio
di Geometria 196
206. L'apparente concretezza dello spazio è un concetto psicologico 196
illusione, dovuta al fatto che le relazioni spaziali sono
immediatamente somministrato
207. L'apparente divisibilità delle relazioni spaziali è o un'illusione, derivante dallo spazio vuoto, oppure
espressione della possibilità di quantitativamente
relazioni spaziali diverse 197
208. L'esternalità non è una relazione, ma un aspetto delle relazioni. L'ordine spaziale, in virtù del suo riferimento alla materia, è un
relazione reale 198 209. Conclusione 199

INTRODUZIONE.

IL NOSTRO PROBLEMA È DEFINITO IN BASE ALLE SUE RELAZIONI CON LA LOGICA, LA PSICOLOGIA E LA MATEMATICA.

1. La geometria, per tutto il XVII e il XVIII secolo, rimase, nella guerra contro l'empirismo, una fortezza inespugnabile degli idealisti. Coloro che sostenevano – come generalmente si credeva nel continente – che fosse possibile una conoscenza certa, indipendente dall'esperienza, del mondo reale, non dovevano far altro che indicare la geometria: solo un pazzo, dicevano, avrebbe messo in dubbio la sua validità, e solo uno sciocco avrebbe negato il suo riferimento oggettivo. Gli empiristi inglesi, in questa materia, si trovarono quindi di fronte a un compito alquanto difficile: o ignoravano il problema, oppure, se, come Hume e

Mill, si avventuravano nell'attacco, erano costretti ad affermare, in modo apparentemente paradossale, che la geometria, in fondo, non possedeva una certezza di *tipo* da quella della meccanica – solo la presenza perpetua di impressioni spaziali, dicevano, rendeva la nostra esperienza della verità degli assiomi così ampia da apparire come certezza assoluta.

Qui, tuttavia, come in molti altri casi, la logica spietata spinse questi filosofi, volenti o nolenti, in una netta opposizione al senso comune del loro tempo. Fu solo grazie a Kant, il creatore dell'epistemologia moderna, che il problema geometrico assunse una forma moderna. Egli ridusse la questione alle seguenti ipotesi: se la geometria possiede certezza apodittica, la sua materia, *cioè* lo spazio, deve essere *a priori* e, come tale, puramente soggettiva; e viceversa, se lo spazio è puramente soggettivo, la geometria deve possedere certezza apodittica. Quest'ultima ipotesi ha maggiore peso per Kant, anzi è indissolubilmente legata a tutta la sua epistemologia; tuttavia, credo che abbia molta meno forza della prima. Accettiamo, per il momento, la formulazione kantiana e cerchiamo di dare precisione ai termini *a priori* e *soggettivo* .

2. Una delle grandi difficoltà, in tutta questa controversia, è l'uso estremamente variabile che questi termini, così come il termine *empirico*, fanno da autori diversi. Per Kant, che non era affatto uno psicologo, *à priori* e *soggettivo* erano termini [quasi intercambiabili [1]] ; nell'uso moderno c'è, in generale, una tendenza a confinare il termine *soggettivo* alla psicologia, lasciando *à priori* a svolgere la funzione di epistemologia. Se accettiamo questa distinzione, possiamo stabilire, corrispondenti ai problemi di queste due scienze, le seguenti definizioni provvisorie: *à priori* si applica a qualsiasi conoscenza che, sebbene forse suscitata dall'esperienza, è *logicamente* presupposta nell'esperienza; *soggettivo* si applica a qualsiasi stato mentale la cui causa immediata risiede non nel mondo esterno, ma entro i limiti del soggetto. Quest'ultima definizione, naturalmente, è formulata esclusivamente per la psicologia: dal punto di vista delle scienze fisiche tutti gli stati mentali sono soggettivi. Ma per una Scienza la cui materia, in senso stretto, è costituita *unicamente* da stati mentali, abbiamo bisogno, se vogliamo usare il termine in qualche modo, di una qualche differenziazione tra gli stati mentali, come segno di una soggettività più specifica da parte di coloro ai quali questo termine viene applicato.

Ora, gli unici stati mentali le cui cause immediate risiedono nel mondo esterno sono *le sensazioni* . Una sensazione pura è, naturalmente, un'astrazione impossibile – non siamo mai completamente passivi sotto l'azione di uno stimolo esterno – ma ai fini della psicologia tale astrazione è utile. Tutto ciò che non è sensazione, dunque, in psicologia lo chiameremo soggettivo. È solo nella sensazione che siamo direttamente influenzati dal mondo esterno, e solo in questo modo esso ci fornisce informazioni dirette su se stesso.

3. Consideriamo ora la questione epistemologica relativa al tipo di conoscenza che si può definire *a priori*. Qui non abbiamo nulla a che fare – almeno in prima istanza – con la causa o la genesi di una conoscenza; accettiamo la conoscenza come un dato da analizzare e classificare. Tale analisi rivelerà un elemento formale e un elemento materiale nella conoscenza. L'elemento formale consisterà nei postulati necessari per rendere possibile la

conoscenza stessa, e in tutto ciò che può essere dedotto da questi postulati; l'elemento materiale, d'altra parte, consisterà in tutto ciò che va a riempire la forma data dai postulati formali – tutto ciò che è contingente o dipendente dall'esperienza, tutto ciò che avrebbe potuto essere diverso senza rendere impossibile la conoscenza. Chiameremo quindi l'elemento formale*a priori*, l'elemento materiale empirico.

4. Qual è dunque il legame tra il soggettivo e l' *à priori* ? Si tratta, ovviamente – se esiste – di un legame esterno,*ovvero*non deducibile direttamente dalla natura di nessuno dei due, ma dimostrabile – se dimostrabile – solo attraverso una visione generale delle condizioni di entrambi. La questione di quale conoscenza sia*à priori*, secondo la definizione di cui sopra, deve dipendere da un'analisi logica della conoscenza, mediante la quale si possano rivelare le condizioni di una possibile esperienza; ma la questione di quali elementi di uno stato cognitivo siano soggettivi deve essere indagata dalla psicologia pura, che deve determinare cosa, nelle nostre percezioni, appartenga alla sensazione e cosa sia opera del pensiero o dell'associazione. Poiché, dunque, queste due questioni appartengono a scienze diverse e possono essere risolte indipendentemente, non sarebbe saggio condurre le due indagini separatamente? Decretare che l' *à priori* debba essere sempre soggettivo sembra pericoloso, se consideriamo che una tale visione pone i nostri risultati, per quanto riguarda l' *à priori* , alla mercé della psicologia empirica. La controversia sulla pura intuizione di Kant dimostra ampiamente quanto sia grave questo pericolo.

5. Pertanto, in tutto il presente saggio, useròil termine *"à priori"* senza alcuna implicazione psicologica. Il mio criterio di priorità sarà puramente logico: l'esperienza sarebbe impossibile se un certo assioma o postulato venisse negato? O,in un senso più ristretto, che attribuisce priorità solo all'interno di una particolare scienza: l'esperienza relativa alla materia di quella scienza sarebbe impossibile senza un certo assioma o postulato? Anche i miei risultati, quindi, saranno puramente logici. Se la psicologia dichiara che alcune cose, che ho dichiarato "*à priori"*, non sono soggettive, allora, a meno di un errore di dettaglio nelle mie dimostrazioni, il collegamento tra " *à priori"* e soggettivo, per quanto riguarda tali cose, deve essere abbandonato. Non ci sarà quindi alcuna discussione, in tutto il presente saggio, sulla relazione tra " *à priori"* e soggettivo – una relazione che non può determinare quali elementi di conoscenza siano *"à priori"* , ma dipende piuttosto da tale determinazione e appartiene, in ogni caso, più alla metafisica che all'epistemologia.

6. Poiché mi sono permesso di usare il termine *à priori* in unsenso leggermente non convenzionale, fornirò alcune osservazioni esplicative di carattere generale.

L' *à priori* , almeno dai tempi di Kant, ha generalmente rappresentato l'elemento necessario o apodittico della conoscenza. Ma la logica moderna ha dimostrato che le proposizioni necessarie sono sempre, almeno sotto un certo aspetto, ipotetiche. Può esserci, e di solito c'è, l'implicazione che la connessione di cui si predica la necessità abbia una qualche esistenza, ma ciò nonostante, la necessità rimanda sempre a un *fondamento* di necessità al di là di sé stessa, e afferma questo fondamento piuttosto che la connessione effettiva. Come fa notare Bradley, "l'arsenico avvelena" rimane vero, anche se non avvelena nessuno. Se,

quindi, l' *à priori* nella conoscenza è principalmente il necessario, deve essere il necessario in base a qualche ipotesi, e il *fondamento* della necessità deve essere incluso come *à priori* . Ma il fondamento della necessità è, per quanto la connessione necessaria in questione possa dimostrare, un mero fatto, un giudizio meramente categorico. Pertanto, la sola necessità è un criterio insufficiente di priorità.

Per integrare questo criterio, dobbiamo fornire l'ipotesi o il fondamento su cui si basa soltanto la necessità, e questo fondamento varierà da una scienza all'altra, e persino, con il progresso della conoscenza, nella stessa scienza in momenti diversi. Infatti, man mano che la conoscenza si sviluppa e si articola, si percepiscono sempre più connessioni necessarie, e le verità meramente categoriche, pur rimanendo il fondamento dei giudizi apodittici, diminuiscono in numero relativo. Tuttavia, in una scienza piuttosto avanzata come la geometria, possiamo, a mio avviso, fornire in modo abbastanza completo il fondamento appropriato e stabilire, entro i limiti della scienza isolata, la distinzione tra ciò che è necessario e ciò che è meramente assertivo.

7. Credo che vi siano due fondamenti su cui si può ricercare la necessità all'interno di qualsiasi scienza. Questi possono essere (molto approssimativamente) distinti come il fondamento che Kant ricerca nei *Prolegomeni*e quello che ricerca nella*Ragione Pura*. Possiamo partire dall'esistenza della nostra scienza come fatto e analizzare il ragionamento impiegato al fine di scoprire il postulato fondamentale da cui dipende la sua possibilità logica; in questo caso, il postulato, e tutto ciò che da esso deriva, sarà*a priori*. Oppure possiamo accettare l'esistenza della materia della nostra scienza come base di fatto e dedurre dogmaticamente tutti i principi possibili dalla natura essenziale di tale materia. In quest'ultimo caso, tuttavia, non è l'intera natura empirica della materia, così come rivelata dalle successive ricerche della nostra scienza, a costituire il nostro fondamento; perché se così fosse, l'intera scienza sarebbe, naturalmente,*a priori*. Piuttosto è quell'elemento, nella materia, che rende*possibile*il ramo dell'esperienza trattato dalla scienza inquestione[2]. L'importanza di questa distinzione apparirà più chiaramente man mano che procederemo[3].

8. In ultima analisi, questi due motivi di necessitàcoincidono *I metodi*di indagine nei due casi differiscono notevolmente, ma i*risultati*non possono differire. Infatti, nel primo caso, attraverso l'analisi della scienza, scopriamo il postulato sul quale soltanto sono possibili i suoi ragionamenti. Ora, se il ragionamento scientifico è impossibile senza un postulato, questo postulato deve essere essenziale per l'esperienza della materia scientifica, e così otteniamo il secondo motivo. Tuttavia, i due metodi sono utili in quanto si completano a vicenda, e il primo, partendo dalla scienza effettiva, è il metodo di indagine più sicuro e semplice, sebbene il secondo sembri il più convincente per l'esposizione.

9. Il corso della mia argomentazione sarà dunque il seguente: nel primo capitolo, come premessa all'analisi logica della geometria, fornirò una breve storia dell'ascesa e dello sviluppo dei sistemi non euclidei. Il secondo capitolo preparerà il terreno per una teoria costruttiva della geometria, mediante una critica di alcune precedenti concezioni filosofiche; in questo capitolo, cercherò di dimostrare che tali concezioni sono in parte vere e in parte

false, e quindi di stabilire, mediante polemiche preliminari, la verità di quelle parti della mia teoria che si trovano in autori precedenti. Gran parte di questa teoria, tuttavia, non può essere introdotta in questo modo, poiché l'intero campo della geometria proiettiva, per quanto ne so, è stato finora sconosciuto ai filosofi. Passando, nel terzo capitolo, dalla critica alla costruzione, tratterò dapprima la geometria proiettiva. Questa, sosterrò, è necessariamente vera per qualsiasi forma di esteriorità, ed è, poiché una tale forma è necessaria per l'esperienza, completamente*a priori*. Nella geometria metrica, tuttavia, che prenderò in considerazione in seguito, gli assiomi si divideranno in due classi: (1) Quelli comuni agli spazi euclidei e non euclidei. Questi risulteranno, da un lato, essenziali per la possibilità di misurazione in qualsiasi continuo e, dall'altro, proprietà necessarie di qualsiasi forma di esternalità con più di una dimensione. Essi saranno quindi dichiarati*a priori*. (2) Quegli assiomi che distinguono gli spazi euclidei da quelli non euclidei. Questi saranno considerati interamente empirici. L'assioma che il numero delle dimensioni è tre, tuttavia, sebbene empirico, sarà dichiarato, poiché piccoli errori sono impossibili in questo caso, esattamente e certamente vero per il nostro mondo reale; mentre i due assiomi rimanenti, che determinano il valore della costante spaziale, saranno considerati solo approssimativamente noti e certi solo entro gli errori diosservazione[4] . Il quarto capitolo, infine, si sforzerà di dimostrare, come ipotizzato nel capitolo III, che una qualche forma di esteriorità è necessaria per fare esperienza, e concluderà mostrando l'impossibilità logica, se si vuole che la conoscenza di tale forma sia libera da contraddizioni, di astrarre completamente questa conoscenza da ogni riferimento alla materia contenuta nella forma stessa.

Spero di aver trattato, con questa discussione, tutti i punti principali relativi ai fondamenti della geometria.

NOTE A PIÈ DI PAGINA:

[1] Cfr. Erdmann, Assioma della geometria, p. 111: "Für Kant sind Apriorität und ausschliessliche Objectivität allerdings Wechselbegriffe."

[2] Qui uso “esperienza” nel senso più ampio possibile, il senso in cui la parola è usata da Bradley.

[3] Laddove il ramo dell’esperienza in questione è essenziale per tutta l’esperienza, l’apriorità risultante può essere considerata assoluta; laddove è necessaria solo per una scienza particolare, come relativa a quella scienza.

[4]

Non ho fornito alcuna descrizione di queste prove empiriche, poiché sembrano essere costituite dall'intero corpus della scienza fisica. Tutto nella scienza fisica, dalla legge di gravitazione alla costruzione di ponti, dallo spettroscopio all'arte della navigazione, verrebbe profondamente modificato da qualsiasi considerevole imprecisione nell'ipotesi che il nostro spazio reale sia euclideo. La verità osservata nella scienza fisica, pertanto, costituisce una schiacciante prova empirica che questa ipotesi è approssimativamente corretta, anche se non rigorosamente vera.

CAPITOLO I.

BREVE STORIA DELLA METAGEOMETRIA.

10. Quando un sistema consolidato da tempo viene attaccato, di solito l'attacco inizia in un unico punto, dove la debolezza della dottrina stabilita è particolarmente evidente. Ma la critica, una volta invitata, tende ad estendersi ben oltre quanto i più audaci, inizialmente, avrebbero desiderato.

"Prima si taglia la liquefazione, poi cosa viene dopo? Ma l'astuta frecciatina di Fichte a Dio stesso?"

Così è stato per la geometria. La liquefazione dell'ortodossia euclidea è l'assioma delle parallele, e fu dal rifiuto di ammettere questo assioma senza dimostrazione che ebbe inizio la metageometria. Il primo tentativo in questa direzione, quello di Legendre [5] , fu ispirato dalla speranza di dedurre questo assioma dagli altri, una speranza che, come ora sappiamo, era destinata a un inevitabile fallimento. Le parallele sono definite da Legendre come rette nello stesso piano, tali che, se una terza retta le interseca, la somma degli angoli interni e opposti risulta uguale a due angoli retti. Egli dimostra senza difficoltà che tali rette non si incontrerebbero, ma non è in grado di dimostrare che le rette non parallele in un piano debbano incontrarsi. Allo stesso modo, può dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due angoli retti e che se un triangolo ha una somma uguale a due

angoli retti, tutti i triangoli hanno la stessa somma; ma non è in grado di dimostrare l'esistenza di questo triangolo.

11. Così il tentativo di Legendre fallì; ma il semplice fallimento non poteva dimostrare nulla. Un metodo più audace, suggerito da Gauss, fu attuato da Lobatchewsky eBolyai[6]. Se l'assioma delle parallele è logicamente deducibile dagli altri, negandolo e mantenendo il resto, saremo condotti a contraddizioni. Questi tre matematici, di conseguenza, affrontarono il problema indirettamente: negarono l'assioma delle parallele, eppure ottennero una geometria logicamente coerente. Dedussero che l'assioma era logicamente indipendente dagli altri ed essenziale al sistema euclideo. Le loro opere, essendo tutte ispirate da questo motivo, possono essere distinte come formative del primo periodo nello sviluppo della metageometria.

Il secondo periodo, inaugurato da Riemann, ebbe un'importanza ben più profonda: fu prevalentemente filosofico nei suoi obiettivi e costruttivo nei suoi metodi. Mirava nientemeno che a un'analisi logica di tutti gli assiomi essenziali della geometria e considerava lo spazio come un caso particolare del concetto più generale di *varietà* . Basandosi sui metodi della geometria metrica analitica, stabilì due sistemi non euclidei: il primo quello di Lobatchewsky, il secondo – in cui veniva negato anche l'assioma della retta, nella forma euclidea – una nuova varietà, per analogia chiamata sferica. Il concetto dominante in questo periodo è la *misura di curvatura* , un termine coniato da Gauss, ma da lui applicato solo alle superfici. Gauss aveva dimostrato che la libera mobilità sulle superfici era possibile solo quando la misura di curvatura era costante; Riemann e Helmholtz estesero questa proposizione a *n* dimensioni, rendendola la proprietà fondamentale dello spazio.

Nel terzo periodo, che inizia con Cayley, il movente filosofico che aveva animato i primi pionieri è meno evidente e viene sostituito da uno spirito più tecnico e matematico. Questo periodo si distingue dal secondo principalmente, dal punto di vista matematico, per il suo metodo, che è proiettivo anziché metrico. Il concetto matematico dominante qui è l'Assoluto (*Grundgebild*), una figura in relazione alla quale tutte le proprietà metriche diventano proiettive. L'opera di Cayley, che fu molto breve e attirò poca attenzione, è stata perfezionata ed elaborata da F. Klein, e grazie a lui ha trovato un'accettazione generale. Klein ha aggiunto ai due tipi di geometria non euclidea già noti, un terzo, che chiama ellittica; questo terzo tipo assomiglia molto alla geometria sferica di Helmholtz, ma si distingue per l'importante differenza che, in essa, due rette si incontrano in un solo punto[7]. Il segno distintivo degli spazi rappresentati da entrambi è che, come la superficie di una sfera, sono finiti ma illimitati. La riduzione delle proprietà metriche a quelle proiettive, come verrà dimostrato in seguito, ha solo un'importanza tecnica; al contempo, la geometria proiettiva è in grado di trattare direttamente quelle proprietà puramente descrittive o qualitative dello spazio che sono comuni sia a Euclide che alla metageometria. Il terzo periodo ha, pertanto, una grande importanza filosofica, mentre il suo metodo possiede, dal punto di vista matematico, una bellezza e un'unità di gran lunga superiori a quelle del secondo; è in grado di trattare simultaneamente tutti i tipi di spazio, cosicché ogni proposizione simbolica è, a seconda del

significato attribuito ai simboli, una proposizione in qualunque geometria si scelga. Ciò ha il vantaggio di dimostrare che ulteriori ricerche non possono condurre a contraddizioni nei sistemi non euclidei, a meno che non rivelino contemporaneamente contraddizioni in Euclide. Questi sistemi, pertanto, sono logicamente validi quanto quello di Euclide stesso.

Dopo questa breve descrizione delle caratteristiche dei tre periodi, passerò a un'analisi più dettagliata. Cercherò di evitare, per quanto possibile, ogni passaggio di matematica tecnica, e di mettere in evidenza solo quei punti fondamentali dello sviluppo matematico che appaiono di importanza logica o filosofica.

Prima ora.

12. L'ideatore dell'intero sistema,*Gauss*, non sembra, per quanto riguarda la geometria non euclidea in senso stretto, in nessuno dei suoi articoli pubblicati finora, aver fornito altro che risultati; le sue dimostrazioni ci restano sconosciute. Tuttavia fu il primo a indagare le conseguenze della negazione dell'assioma delleparallele [8] , e nelle sue lettere comunicò queste conseguenze ad alcuni suoi amici, tra cui Wolfgang Bolyai. La prima menzione dell'argomento nelle sue lettere si verifica quando aveva solo 18 anni; quattro anni dopo, nel 1799, scrivendo a W. Bolyai, enuncia l'importante teorema secondo cui, nella geometria iperbolica, esiste un massimo per l'area di un triangolo. Da scritti successivi sembra che avesse elaborato un sistema quasi, se non del tutto, completo come quelli di Lobatchewsky eBolyai [9] .

È importante ricordare, tuttavia, che il lavoro di Gauss sulla curvatura, che *fu* pubblicato, gettò le basi per l'intero metodo del secondo periodo e fu intrapreso, secondo Riemann e Helmholtz [10] , in vista di un'indagine (non pubblicata) sui fondamenti della geometria. Il suo lavoro in questa direzione, per via del suo metodo, sarà trattato meglio nell'ambito del secondo periodo, ma è interessante osservare che egli si trovò, come molti pionieri, a capo di due tendenze che in seguito divergettero.

13. *Lobatchewsky*, professore all'Università di Kasan, pubblicò per la prima volta i suoi risultati, nella loro lingua madre russa, negli atti di quell'organo accademico per gli anni 1829-1830. A causa di questa doppia oscurità di lingua e luogo, essi attirarono poca attenzione, finché non li tradusse infrancese [11] etedesco [12] : anche allora, non sembrano aver ottenuto l'attenzione che meritavano, finché, nel 1868, Beltrami non riscoprì l'articolo in Crelle e ne fece il tema di una brillante interpretazione.

Nell'introduzione al suo piccolo libro in tedesco, Lobatchewsky lamenta lo scarso interesse mostrato dai suoi compatrioti per i suoi scritti e la disattenzione dei matematici, sin dal tentativo fallito di Legendre, verso le difficoltà della teoria delle parallele. Il corpo dell'opera inizia con l'enunciazione di alcune importanti proposizioni valide sia nel sistema proposto che in quello di Euclide: alcune di queste sono comunque indipendenti dall'assioma delle parallele, mentre altre lo diventano sostituendo, alla parola "parallele", l'espressione "non intersecanti, per quanto prolungate". Segue poi una definizione, formulata intenzionalmente in modo da contraddire quella di Euclide: rispetto a una data retta, tutte le altre rette nello

stesso piano si possono dividere in due classi, quelle che intersecano la retta data e quelle che non la intersecano; la retta che costituisce il limite tra le due classi si dice *parallela* alla retta data. Ne consegue che, da qualsiasi punto esterno, si possono tracciare due parallele, una per ogni direzione. Partendo da questo presupposto, mediante il metodo sintetico euclideo, si deducono una serie di proposizioni; la più importante di queste è che in un triangolo la somma degli angoli è sempre minore o sempre uguale a due angoli retti, mentre in quest'ultimo caso l'intero sistema diventa ortodosso. Viene inoltre dimostrata una certa analogia con la geometria sferica – il cui significato e la cui portata appariranno in seguito – che consiste approssimativamente nella sostituzione delle funzioni iperboliche con le funzioni circolari.

14. Molto simile è il sistema di*Johann Bolyai*, così simile, in effetti, da far sembrare quasi incredibile l'indipendenza delle due opere, sebbene sia un fatto ben documentato. Johann Bolyai pubblicò per la prima volta i suoi risultati nel 1832, in un'appendice a un'opera di suo padre Wolfgang, intitolata: "Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica". Gauss, di cui divenne amico intimo al college e rimase per tutta la vita, fu, come abbiamo visto, l'ispiratore di Wolfgang Bolyai, e soleva dire che quest'ultimo era l'unico uomo che apprezzava le sue speculazioni filosofiche sugli assiomi della geometria; tuttavia, Wolfgang sembra aver lasciato al figlio Johann l'elaborazione dettagliata del sistema iperbolico. Le opere di entrambi i Bolyai sono molto rare, e il loro metodo e i loro risultati mi sono noti solo attraverso le interpretazioni di Frischauf eHalsted[13]. Sia per quanto riguarda il metodo che per quanto riguarda i risultati, il sistema è molto simile a quello di Lobatchewsky, quindi non è necessario soffermarci qui su nessuno dei due. Solo i postulati iniziali, che sono più espliciti di quelli di Lobatchewsky, richiedono una breve attenzione. L'introduzione di Frischauf, che ha un'aria filosofica e newtoniana, inizia affermando che la geometria si occupa dello spazio assoluto (vuoto), ottenuto astraendo dai corpi in esso contenuti, che due figure sono dette congruenti quando differiscono solo nella posizione e che l'assioma di congruenza è indispensabile in ogni determinazione delle grandezze spaziali. La congruenza doveva riferirsi a corpi geometrici, privi di qualsiasi proprietà dei corpi ordinari eccetto l'impenetrabilità (Erdmann, Axiome der Geometrie, p. 26). Una linea retta è definita come determinata da due dei suoipunti[14], e un piano come determinato da tre. Queste premesse, con una leggera eccezione per quanto riguarda la linea retta, troveremo in seguito essenziali per ogni geometria. Ho richiamato l'attenzione su di esse, poiché si suppone spesso che i non euclidei neghino l'assioma di congruenza, il che, qui e altrove, non è mai vero. L'enfasi posta su questo assioma da Bolyai è probabilmente dovuta all'influenza di Gauss, il cui lavoro sulla curvatura delle superfici ha gettato le basi per l'uso che Helmholtz ha fatto della congruenza.

15. È importante ricordare che, per tutto il periodo appena esaminato, lo scopo della geometria iperbolica è indiretto: non la verità di quest'ultima, ma l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele dal resto, è il motivo guida dell'opera. Se, negando l'assioma delle parallele pur mantenendo il resto, possiamo ottenere un sistema privo di contraddizioni

logiche, ne consegue che l'assioma delle parallele non può essere implicitamente contenuto negli altri. Se così fosse, i tentativi di fare a meno dell'assioma, come quelli di Legendre, non possono avere successo; Euclide deve rimanere saldo o cadere con l'assioma sospetto. Naturalmente, restava possibile che, con ulteriori sviluppi, si sarebbero potute rivelare contraddizioni latenti in questi sistemi. Questa possibilità, tuttavia, fu eliminata dal lavoro più diretto e costruttivo del secondo periodo, al quale dobbiamo ora rivolgere la nostra attenzione.

Attenzione.

Secondo periodo.

16. L'opera di Lobatchewsky e Bolyai rimase, per quasi un quarto di secolo, senza eredi; anzi, le ricerche di Riemann e Helmholtz, quando giunsero, sembrano essere state ispirate non da questi uomini, ma piuttosto daGauss [15] e Herbart. Troviamo, di conseguenza, una grande differenza, sia di scopo che di metodo, tra il primo e il secondo periodo. Il primo, partendo da una critica di un punto del sistema di Euclide, conservò il suo metodo sintetico, pur scartando uno dei suoi assiomi. Il secondo, al contrario, essendo guidato da uno spirito filosofico piuttosto che matematico, si sforzò di classificare la concezione dello spazio come una specie di una concezione più generale: trattò lo spazio algebricamente, e le proprietà che attribuiva allo spazio erano espresse in termini non di intuizione, ma di algebra. L'obiettivo di Riemann e Helmholtz era quello di dimostrare, attraverso l'esposizione di alternative logicamente possibili, la natura empirica degli assiomi consolidati. A tal fine, concepirono lo spazio come un caso particolare di varietà e dimostrarono che diverse relazioni di grandezza (*Massverhältnisse*) erano matematicamente possibili in una varietà estesa. La loro filosofia, che a mio avviso non è sempre ineccepibile, verrà discussa nel Capitolo II; qui, pur essendo importante ricordare la motivazione filosofica di Riemann e Helmholtz, limiteremo la nostra attenzione all'aspetto matematico del loro lavoro. Così facendo, pur temendo di stravolgere in qualche modo il sistema del loro pensiero, otterremo una maggiore unità di soggetto e una trattazione più compatta dello sviluppo puramente matematico. Ma c'è, a mio parere, un'ulteriore ragione per separare la loro filosofia dalla loro matematica. Sebbene il loro scopo filosofico fosse dimostrare che tutti gli assiomi della geometria sono empirici e che un diverso contenuto della nostra esperienza avrebbe potuto modificarli tutti, il risultato non intenzionale del loro lavoro matematico fu, se non erro, quello di fornire materiale per una*a priori*di certi assiomi. Questi assiomi, sebbene li ritenessero superflui, venivano sempre introdotti nei loro lavori matematici, prima di porre le basi dei sistemi non euclidei. Sosterrò, nel Capitolo III, che questa conservazione era logicamente inevitabile e non era dovuta semplicemente, come supponevano, al desiderio di conformarsi all'esperienza. Se ho ragione, esiste una divergenza tra Riemann e Helmholtz filosofi e Riemann e Helmholtz matematici. Questa divergenza rende ancora più auspicabile tracciare lo sviluppo matematico separatamente dalla filosofia che lo ha accompagnato.

17. L'opera epocale*di RiemannÜber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grande liegen* [16] ", fu scritta e letta a una piccola cerchia nel 1854; tuttavia, a causa di alcune modifiche che

egli desiderava apportare, rimase inedita fino al 1867, quando fu pubblicata dai suoi esecutori testamentari. I due concetti fondamentali, sulla cui invenzione si fonda l'importanza storica di questa dissertazione, sono quello di*varietà*e quello della*misura di curvatura*di una varietà. Il primo concetto ha uno scopo principalmente filosofico ed è concepito, soprattutto, per mostrare lo spazio come esempio di un concetto più generale. Su questo aspetto della varietà, avrò molto da dire nel Capitolo II; il suo aspetto matematico, che è l'unico che ci interessa qui, è meno complicato e meno fecondo di controversie. Anche il secondo concetto ha un duplice scopo, ma il suo uso matematico è il più rilevante. Considereremo questi due concetti in successione.

18. (1) *Concezione di una varietà* [17] .Lo scopo generale della dissertazione di Riemann è quello di mostrare gli assiomi come passi successivi nella classificazione dello spazio delle specie. Gli assiomi della geometria, come i segni di una definizione scolastica, appaiono come determinazioni successive di concezioni di classe, che terminano con lo spazio euclideo. Abbiamo quindi, dal punto di vista analitico, una formulazione logica e precisa quanto si possa desiderare, una formulazione in cui, per il suo carattere classificatorio, sembriamo certi di non avere nulla di superfluo o ridondante, e otteniamo gli assiomi esplicitamente nella forma più desiderabile, vale a dire come aggettivi della concezione dello spazio. Allo stesso tempo, è un peccato che Riemann, in accordo con la tendenza metrica del suo tempo, abbia considerato lo spazio principalmente come unagrandezza [18] , o un insieme di grandezze, in cui il problema principale consiste nell'assegnare quantità ai diversi elementi o punti, senza riguardo alla natura qualitativa delle quantità assegnate. Ne consegue una notevole oscurità riguardo all'intera natura dellagrandezza [19] . Questa visione della geometria è alla base della definizione di varietà, come concetto generale di cui lo spazio costituisce un caso particolare. Questa definizione, che non è molto chiara, può essere resa come segue.

19. Secondo Riemann, le concezioni di grandezza sono possibili solo laddove si disponga di una concezione generale, suscettibile di varie determinazioni (*Bestimmungsweisen*). Le varie determinazioni di tale concezione formano insieme una*varietà*, che è continua o discreta a seconda che il passaggio da una determinazione all'altra sia continuo o discreto. Particolari elementi di una varietà, o quanti, possono essere confrontati mediante il conteggio quando sono discreti, e mediante la misurazione quando sono continui. "La misurazione consistein unasovrapposizione delle grandezze da confrontare. Se questa è assente, le grandezze possono essere confrontate solo quando una è parte di un'altra, e in tal caso si può decidere solo il maggiore o il minore, non il quanto" (p. 256). Si giunge così alla concezione generale di una varietà multidimensionale, di cui lo spazio e i colori sono menzionati come casi particolari. All'assenza di questa concezione Riemann attribuisce l'"oscurità" che, in materia di assiomi, "durò da Euclide a Legendre" (p. 254). E Riemann è certamente riuscito, da un punto di vista algebrico, a esporre, con molta più chiarezza di qualsiasi suo predecessore, gli assiomi che distinguono la grandezza spaziale dalle altre grandezze con cui la matematica ha familiarità. Ma, partendo dal presupposto che lo spazio possa essere considerato una grandezza, è stato portato a formulare il problema come: Che tipo di grandezza è lo spazio? piuttosto che: Cosa deve essere lo spazio affinché possiamo considerarlo una grandezza?

Non si rende conto, inoltre – e in effetti ai suoi tempi erano in pochi a rendersene conto – che è possibile una geometria elaborata che non tratti affatto lo spazio come una grandezza. La sua definizione di spazio come specie di molteplicità, sebbene a fini analitici definisca in modo molto soddisfacente la natura delle grandezze spaziali, lascia quindi oscuro il vero fondamento di questa natura, che risiede nella natura dello spazio come sistema di relazioni ed è anteriore alla possibilità stessa di considerarlo come un sistema di grandezze.

Ma per procedere con lo sviluppo matematico delle idee di Riemann, abbiamo visto che egli affermò che la misurazione consiste in una sovrapposizione delle grandezze da confrontare. Ma affinché questo possa essere un mezzo possibile per determinare le grandezze, continua, queste grandezze devono essere indipendenti dalla loro posizione nella varietà (p. 259). Ciò può avvenire, dice, in diversi modi, il più semplice dei quali, egli assume che le lunghezze delle linee siano indipendenti dalla loro posizione. Sarebbe interessante sapere quali altri modi siano possibili: da parte mia, non riesco a immaginare alcuna altra ipotesi in base alla quale la grandezza sia indipendente dal luogo. Tralasciando questo, tuttavia, il problema, poiché la misurazione consiste in una sovrapposizione, diventa identico alla determinazione della varietà più generale in cui le grandezze sono indipendenti dal luogo. Questo ci porta all'altra concezione fondamentale di Riemann, che mi sembra ancora più feconda di quella di varietà.

20. (2) *Misura di curvatura*.Questa concezione è dovuta a Gauss, ma fu da lui applicata solo alle superfici; la novità nella dissertazione di Riemann fu la sua estensione a una varietà di*n*dimensioni. Questa estensione, tuttavia, è espressa in modo piuttosto breve e oscuro, ed è stata ulteriormente oscurata dai tentativi di Helmholtz di divulgazione. Anche il termine*curvatura*è fuorviante, tanto che la frase è stata fonte di più fraintendimenti, persino tra i matematici, di qualsiasi altra in Pangeometria. Spesso si dimentica, nonostante l'esplicitaaffermazione di Helmholtz [20] , che la "misura di curvatura" di una*n*-dimensionale è un'espressione puramente analitica, che ha solo un'affinità simbolica con la curvatura ordinaria. Applicata allo spazio tridimensionale, l'implicazione di uno spazio "piano" quadridimensionale è del tutto fuorviante; userò quindi generalmente il termine costante spaziale[21] . Tuttavia, poiché la concezione si è evoluta storicamente a partire da quella della curvatura, fornirò una brevissima esposizione dello sviluppo storico delle teorie sulla curvatura.

Così come il concetto di *lunghezza* è stato originariamente derivato dalla linea retta ed esteso ad altre curve dividendole in infinitesimi segmenti di retta, allo stesso modo il concetto di *curvatura* è stato derivato dal cerchio ed esteso ad altre curve dividendole in infinitesimi archi di cerchio. La curvatura può essere considerata, in origine, come una misura di quanto una curva si discosta da una linea retta; in un cerchio, che è uniforme in tutta la sua lunghezza, questa misura è evidentemente costante e si misura con il reciproco del raggio. Ma in tutte le altre curve, la curvatura varia da punto a punto, quindi non può essere misurata senza considerare gli infinitesimi. La misura che si presenta immediatamente è la curvatura del cerchio che più si avvicina alla curva nel punto considerato. Poiché un cerchio è determinato

da tre punti, questo cerchio passerà per tre punti consecutivi della curva. Abbiamo quindi definito la curvatura di qualsiasi curva, piana o tortuosa; infatti, poiché tre punti qualsiasi giacciono su un piano, un tale cerchio può sempre essere descritto.

Se ora passiamo a una superficie, ciò che vogliamo è, per analogia, una misura della sua deviazione da un piano. La curvatura, come definita sopra, è diventata indeterminata, poiché attraverso qualsiasi punto della superficie possiamo tracciare un numero infinito di archi, che in generale non avranno tutti la stessa curvatura. Tracciamo, quindi, tutte le geodetiche che uniscono il punto in questione ai punti vicini della superficie in tutte le direzioni. Poiché questi archi formano una varietà singolarmente infinita, tra di essi, se non hanno tutti la stessa curvatura, ci sarà un arco di curvatura massima e uno di curvatura minima [22] . Il prodotto di queste curvature massima e minima è chiamato *misura di curvatura* della superficie nel punto considerato. Per illustrare con alcuni semplici esempi: su una sfera, le curvature di tutte queste linee sono uguali al reciproco del raggio della sfera, quindi la misura di curvatura ovunque è il quadrato del reciproco del raggio della sfera. Su qualsiasi superficie, come un cono o un cilindro, su cui si possano tracciare linee rette, queste non presentano curvatura, cosicché la misura della curvatura è ovunque pari a zero – questo è il caso, in particolare, del piano. In generale, tuttavia, la misura della curvatura di una superficie varia da punto a punto.

Gauss, l'inventore di questa concezione [23] , dimostrò che, affinché due superfici possano essere sviluppabili l'una sull'altra, *cioè* tali che una possa essere piegata nella forma dell'altra senza allungarsi o strapparsi, è necessario che le due superfici abbiano misure di curvatura uguali in punti corrispondenti. In tal caso, ogni figura possibile su una è, in generale, possibile sull'altra, e le due hanno praticamente la stessa geometria [24] . Come corollario, ne consegue che una condizione necessaria per la libera mobilità delle figure su qualsiasi superficie è la costanza della misura di curvatura [25] . Questa condizione è stata dimostrata essere sufficiente, oltre che necessaria, da Minding [26] .

21. Finora tutto è filato liscio: abbiamo trattato idee puramente geometricheinmodo puramente geometrico, ma non abbiamo ancora trovato un senso della misura di curvatura, che può essere estesa allo spazio, e ancor meno a una*n*-dimensionale. A tal fine, dobbiamo esaminare il metodo di Gauss, che ci permette di determinare la misura di curvatura di una superficie in qualsiasi punto come proprietà intrinseca, del tutto indipendente da qualsiasi riferimento alla terza dimensione.

Il metodo per determinare la misura della curvatura dall'interno è, in breve, il seguente: se un punto qualsiasi sulla superficie è determinato da due coordinate, u , v , allora piccoli archi della superficie sono dati dalla formula

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 ,$$

dove E , F , G sono, in generale, funzioni di u , v . [27] Da questa sola formula, senza riferimento ad alcuno spazio esterno alla superficie, possiamo determinare la misura di curvatura nel punto u , v , in funzione di E , F , G e dei loro differenziali rispetto a u e v . Pertanto possiamo considerare la misura di curvatura di una superficie come una proprietà intrinseca, e la

definizione geometrica di cui sopra, che implicava un riferimento alla terza dimensione, può essere omessa. Ma a questo punto è necessaria una cautela. Risulterà nel Cap . III. (§ 176) che è logicamente impossibile impostare un sistema di coordinate preciso, in cui le coordinate rappresentino grandezze spaziali, senza l'assioma della Libera Mobilità, e questo assioma, come abbiamo appena visto, vale sulle superfici solo quando la misura di curvatura è costante. Pertanto, la nostra definizione della misura di curvatura sarà *realmente* svincolata dal riferimento alla terza dimensione solo quando avremo a che fare con una superficie a curvatura costante, un punto che Riemann trascura completamente. Questa cautela, tuttavia, si applica solo nello spazio, e se assumiamo il sistema di coordinate come presupposto nella concezione di una varietà, possiamo ignorare del tutto tale cautela, pur ricordando che la possibilità di un sistema di coordinate nello spazio implica assiomi che verranno esaminati in seguito. Possiamo quindi comprendere come si possa trovare un significato, senza riferimento ad alcuna dimensione superiore, per una misura di curvatura costante dello spazio tridimensionale, o per qualsiasi misura di curvatura di una varietà *n* - dimensionale in generale.

22. Tale significato è fornito dalla dissertazione di Riemann, allaquale, dopo questa lunga digressione, possiamo ora tornare. Possiamo definire una varietà continua come un qualsiasi continuum di elementi, tale che un singolo elemento sia definito da *n* grandezze continuamente variabili. Questa definizione non include realmente lo spazio, poiché le coordinate nello spazio non definiscono un punto, ma le sue relazioni con l'origine, che è di per sé arbitraria. Include, tuttavia, la concezione analitica dello spazio di cui si occupa Riemann e può, quindi, essere lasciata valida per il momento. Riemann assume quindi che la differenza – o distanza, come si può chiamare in senso lato – tra due elementi qualsiasi sia paragonabile, per quanto riguarda la grandezza, alla differenza tra altri due elementi qualsiasi. Assume inoltre, ciò che è merito di Helmholtz aver dimostrato, che la differenza *ds* tra due elementi consecutivi possa essere espressa come la radice quadrata di una funzione quadratica delle differenze delle coordinate: *cioè*

$$ds^2 = \Sigma_1^n \Sigma_1^n a_{ik} dx_i . dx_k ,$$

dove i coefficienti a_{ik} sono, in generale, funzioni delle coordinate $x_1 x_2$

… x_n . [28] La questione è: come possiamo ottenere una definizione della misura di curvatura da questa formula? È evidente, in primo luogo, che, proprio come in una superficie abbiamo trovato un numero infinito di *raggi* di curvatura in un punto, così in una varietà di tre o più dimensioni dobbiamo trovare un numero infinito di *misure* di curvatura in un punto, una per ogni varietà bidimensionale passante per il punto e contenuta nella varietà superiore. Ciò che dobbiamo fare in primo luogo, quindi, è definire tali varietà bidimensionali. Esse devono consistere, come abbiamo visto sulla superficie, di una serie singolarmente infinita di geodetiche passanti per il punto. Ora una geodetica è completamente determinata da un punto e dalla sua direzione in quel punto, o da un punto e dal successivo punto consecutivo. Quindi una geodetica passante per il punto considerato è determinata dai rapporti degli incrementi delle coordinate, $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Supponiamo di avere due geodetiche di questo

tipo, in cui gli *i* '-esimi incrementi sono rispettivamente $d'x_i$ e $d''x_i$. Allora tutte le geodetiche date da

$$dx_i = \lambda' d'x_i + \lambda'' d''x_i$$

formano una serie infinita singola, poiché contengono un parametro, vale a dire λ': λ". Tale serie di geodetiche, quindi, deve formare una varietà bidimensionale , con una misura di curvatura nel senso gaussiano ordinario. Questa misura di curvatura può essere determinata dalla formula sopra riportata per l'arco elementare, con l'aiuto della formula generale di Gauss a cui si è fatto riferimento sopra. Otteniamo così un numero infinito di misure di curvatura in un punto, ma da $\frac{n.(n-1)}{2}$ di queste, il resto può essere dedotto

(Riemann, Gesammelte Werke, p. 262). Quando tutte le misure di curvatura in un punto sono costanti e uguali a tutte le misure di curvatura in qualsiasi altro punto, otteniamo ciò che Riemann chiama una varietà a curvatura costante. In una tale varietà è possibile la libera mobilità e le posizioni non differiscono intrinsecamente l'una dall'altra. Se *a* è la misura di curvatura, la formula per l'arco diventa, in questo caso,

$$ds^2 = \Sigma dx^2 / \left(1 + \frac{1}{4a} \Sigma x^2\right)^2 .$$

4

Solo in questo caso, come ho già sottolineato, il termine "misura di curvatura" può essere propriamente applicato allo spazio senza riferimento a una dimensione superiore, poiché la libera mobilità è logicamente indispensabile all'esistenza della geometria quantitativa o metrica.

23. Il risultato matematico della dissertazione di Riemann può essere riassunto come segue. Supponendo che sia possibile applicare una grandezza allo spazio,*ovvero*determinarne gli elementi e le figure per mezzo di quantità algebriche, ne consegue che lo spazio può essere ricondotto al concetto di varietà, come un sistema di elementi quantitativamente determinabili. Tuttavia, a causa della natura peculiare della misurazione spaziale, la determinazione quantitativa dello spazio richiede che le grandezze siano indipendenti dal luogo; nella misura in cui ciò non avvenga, la nostra misurazione sarà necessariamente imprecisa. Se ora assumiamo, come relazione quantitativa della distanza tra due elementi, la radice quadrata di una funzione quadratica delle coordinate – una formula successivamente dimostrata da Helmholtz e Lie – ne consegue, poiché le grandezze devono essere indipendenti dal luogo, che lo spazio deve, entro i limiti dell'osservazione, avere una misura di curvatura costante, o deve, in altre parole, essere omogeneo in tutte le sue parti. Nell'infinitesimale, afferma Riemann (p. 267), l'osservazione non potrebbe rilevare una deviazione dalla costanza da parte della misura della curvatura; ma non tenta di mostrare come la geometria potrebbe rimanere possibile in tali circostanze, e l'unica geometria che ha costruito si basa interamente sulla libera mobilità. Cercherò di dimostrare, nel Capitolo III, che qualsiasi geometria metrica che tentasse di fare a meno di questo assioma sarebbe

logicamente impossibile. Per ora mi limiterò a sottolineare che Riemann, nonostante il suo desiderio di dimostrare che tutti gli assiomi possono essere eliminati, ha tuttavia, nel suo lavoro matematico, mantenuto tre assiomi fondamentali, vale a dire la libera mobilità, il numero intero finito di dimensioni e l'assioma che due punti hanno una relazione unica, cioè la distanza. Come vedremo in seguito, questi principi vengono mantenuti, nel lavoro matematico concreto, da tutti i metageometri metrici, anche quando credono, come Riemann e Helmholtz, che nessun assioma sia filosoficamente indispensabile.

24. *Helmholtz*, il seguace storicamente più vicino a Riemann, fu guidato da una filosofia empirica simile e giunse indipendentemente a un metodo molto simile per formulare gli assiomi. Sebbene Helmholtz non abbia pubblicato nulla sull'argomento fino a dopo la morte di Riemann, aveva appena visto la dissertazione di Riemann (pubblicata postuma) e aveva elaborato i suoi risultati, per quanto fossero completi a quel punto, in totale indipendenza sia da Riemann che da Lobatchewsky. Helmholtz è di gran lunga l'autore più letto di tutti gli studiosi di metageometria e i suoi scritti, quasi da soli, rappresentano per i filosofi il punto di vista matematico moderno su questo argomento. Ma la sua importanza, in questo ambito, è molto maggiore come filosofo che come matematico; quasi il suo unico risultato matematico originale, per quanto riguarda la geometria, è la sua dimostrazione della formula di Riemann per l'arco infinitesimale, e persino questa dimostrazione era tutt'altro che rigorosa, finché Lie non la riformulò con il suo metodo dei gruppi continui. In questo capitolo dobbiamo quindi occuparci solo di due dei suoi scritti, vale a dire i due articoli delle*Wissenschaftliche Abhandlungen*, vol.II., intitolati rispettivamente "Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie", 1866 (p. 610 ss.), e "Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", 1868 (p. 618 ss.).

25. Nel primo di questi, che è principalmente di carattere filosofico, Helmholtz accenna al suo lavoro matematico allora incompiuto, ma nella maggior parte dei casi si limita a presentare i risultati ottenuti. Annuncia che dimostrerà la formula quadratica di Riemann per l'arco infinitesimale; ma a tal fine, afferma, dobbiamo*partire*dalla congruenza, poiché senza di essa la misurazione spaziale è impossibile. Ciononostante, sostiene che la congruenza è dimostrata dall'esperienza. Come potremmo, senza l'ausilio della misurazione, scoprire delle violazioni della congruenza, è un punto che non affronta. Enuncia quindi i quattro assiomi che considera essenziali per la geometria, come segue:

(1) *Per quanto riguarda la continuità e le dimensioni*. In uno spazio a *n* dimensioni, un punto è determinato univocamente dalla misurazione di *n* variabili continue (coordinate).

(2) *Per quanto riguarda l'esistenza di corpi rigidi mobili*. Tra le 2n *coordinate* di qualsiasi coppia di punti di un corpo rigido, esiste un'equazione che è la stessa per tutte le coppie di punti congruenti. Considerando un numero sufficiente di coppie di punti, otteniamo più equazioni che quantità incognite: questo ci fornisce un metodo per determinare la forma di queste equazioni, in modo da renderle tutte soddisfatte.

(3) *Per quanto riguarda la libera mobilità*. Ogni punto può passare liberamente e continuamente da una posizione all'altra. Da (2) e (3) segue che, se due sistemi *A* e *B* possono essere portati in congruenza in una qualsiasi posizione, ciò è possibile anche in ogni altra posizione.

(4) *Per quanto riguarda l'indipendenza della rotazione nei corpi rigidi* (monodromia). Se (*n* – 1) punti di un corpo rimangono fissi, in modo che ogni altro punto possa descrivere solo una certa curva, allora quella curva è chiusa.

Questi assiomi, dice Helmholtz, sono sufficienti a dare, con l'assioma delle tre dimensioni, i sistemi euclideo e non euclideo come uniche alternative. Che siano *sufficienti* , matematicamente, non si può negare, ma sembrano, per certi aspetti, andare troppo oltre. In primo luogo, non c'è bisogno di far applicare l'assioma di congruenza ai corpi rigidi reali: su questo argomento ho approfondito nel Capitolo II. [29] Inoltre, la libera mobilità, a differenza della congruenza, non ha quasi bisogno di essere formulata in modo specifico: quale barriera potrebbe offrire lo spazio vuoto al progresso di un punto? L'assioma è coinvolto nell'omogeneità dello spazio, che è la stessa cosa dell'assioma di congruenza. Anche la monodromia è stata severamente criticata; non solo è evidente che avrebbe potuto essere inclusa nella congruenza, ma anche dal punto di vista puramente analitico, Sophus Lie ha dimostrato che è superflua [30] . Pertanto, l'assioma di congruenza, se formulato correttamente, comprende il terzo e il quarto assioma di Helmholtz e parte del suo secondo assioma. Tutti e quattro, o meglio, la parte di essi rilevante per la geometria, sono conseguenze, come vedremo in seguito, dell'unico principio fondamentale della relatività delle posizioni.

26. Il secondo articolo, che è principalmente di natura matematica, fornisce la dimostrazione promessa della formula dell'arco, che rappresenta il contributo più importante di Helmholtz alla geometria. Riemann aveva*ipotizzato*questa formula, come la più semplice tra diverse alternative: Helmholtz dimostrò che essa era una conseguenza necessaria dei suoi assiomi. Il presente articolo inizia con una breve ripetizione del primo, inclusa l'enunciazione degli assiomi, ai quali, alla fine dell'articolo, se ne aggiungono altri due: (5) che lo spazio ha tre dimensioni e (6) che lo spazio è infinito. Nel testo, come anche nel primo articolo, si suppone che la misura della curvatura non possa essere negativa e, di conseguenza, che uno spazio infinito debba essere euclideo. Questo errore, presente in entrambi gli articoli, viene corretto nelle note aggiunte dopo la pubblicazione dell'articolo di Beltrami sulla curvatura negativa. Si tratta di un esempio della natura leggermente non professionale del lavoro matematico di Helmholtz su questo argomento, che suscita in Klein le seguentiosservazioni [31] : "Helmholtz non è un matematico di professione, ma un fisico e fisiologo... Da questa qualità non matematica di Helmholtz, segue naturalmente che non tratta la parte matematica del suo lavoro con la completezza che ci si aspetterebbe da un matematico di professione (*von Fach*)." Egli stesso afferma che fu lo studio fisiologico della vista a condurlo alla questione degli assiomi, ed è come fisico che fa sì che i suoi assiomi si riferiscano a corpi rigidi reali. Di conseguenza, troviamo errori nella sua matematica, come l'assioma di monodromia e

l'assunzione che la misura della curvatura debba essere positiva. Tuttavia, la dimostrazione della formula dell'arco di Riemann è estremamente valida ed è stata, nel complesso, confermata dalle indagini più approfondite di Lie.

27. Gli altri scritti di Helmholtz sulla geometria sono quasi interamente di natura filosofica e saranno trattati ampiamente nel Capitolo II. Per il momento, possiamo passare all'unico altro autore importante del secondo periodo,*Beltrami*. Poiché la sua opera è puramente matematica e contiene pochi punti controversi, non è necessario, nonostante la sua grande importanza, soffermarci a lungo su di essa.

Il "Saggio di Interpretazione della Geometria non- Euclidea [32] ," che è principalmente confinato a due dimensioni, interpreta i risultati di Lobatchewsky con il metodo caratteristico del secondo periodo. Mostra, attraverso uno sviluppo del lavoro di Gauss e Minding [33] , che tutte le proposizioni in geometria piana, che Lobatchewsky aveva enunciato, valgono, nello spazio euclideo ordinario, su superfici a curvatura negativa costante. È strano, come fa notare Klein [34] , che questa interpretazione, nota a Riemann e forse anche a Gauss, sia rimasta così a lungo senza una dichiarazione esplicita. Ciò è tanto più strano, poiché la "Géométrie Imaginaire" di Lobatchewsky era apparsa in Crelle, Vol. XVII.

[35] , e l'articolo di Minding, da cui segue subito l'interpretazione, era apparso in Crelle, Vol. XIX. Minding aveva dimostrato che la geometria delle superfici a curvatura negativa costante, in particolare per quanto riguarda i triangoli geodetici, poteva essere dedotta da quella della sfera dando al raggio un valore puramente immaginario *ia* [36] . Questo risultato, come abbiamo visto, era stato ottenuto anche da Lobatchewsky per la sua Geometria, eppure ci vollero trent'anni prima che la connessione venisse portata all'attenzione generale.

28. Nel Saggio di Beltrami, le linee rette sono ovviamente sostituite dalle geodetiche; le sue coordinate sono ottenute attraverso una corrispondenza punto per punto con un piano ausiliario, in cui le linee rette corrispondono alle geodetiche sulla superficie. Pertanto, le geodetiche hanno equazioni lineari e sono sempre determinate univocamente da due punti. Le distanze sulla superficie, tuttavia, non sono uguali alle distanze sul piano; quindi, mentre la superficie è infinita, la corrispondente porzione del piano è contenuta all'interno di un certo cerchio finito. La distanza tra due punti sulla superficie è una certa funzione delle coordinate, non la normale funzione della geometria elementare. Queste relazioni tra piano e superficie sono importanti in relazione alla teoria della distanza di Cayley, che dovremo considerare in seguito. Se dovessimo definire la distanza sul piano come quella funzione delle coordinate che fornisce la corrispondente distanza sulla superficie, dovremmo ottenere ciò che Klein chiama "un piano con un sistema di misura iperbolico (*Massbestimmung*)" in cui la teoria della distanza di Cayley sarebbe valida. È evidente, tuttavia, che nella definizione del sistema di coordinate si è presupposto il concetto ordinario di distanza, cosicché non si ottengono geometrie alternative sullo stesso piano. La rilevanza di queste osservazioni risulterà più chiara quando prenderemo in considerazione Cayley e Klein.

29. Il valore del Saggio di Beltrami, secondo lo stesso autore, risiede nel senso euclideo intelligibile che esso conferisce alla planimetria di Lobatchewsky: il corrispondente sistema di geometria solida, poiché non ha alcun significato per lo spazio euclideo, è appena menzionato in quest'opera. In un secondoarticolo [37] , tuttavia, quasi contemporaneo al primo, egli procede a considerare la teoria generale delle*n*-dimensionali a curvatura negativa costante. Questo articolo è fortemente influenzato dalla dissertazione di Riemann; inizia con la formula per l'elemento lineare e dimostra da questa, dapprima, che la congruenza vale per tali spazi e, successivamente, che essi hanno, secondo la definizione di Riemann, una misura di curvatura negativa costante. (È istruttivo osservare che sia in questo che nel precedente saggio, viene posta grande enfasi sulla necessità dell'assioma di congruenza.)

Questo lavoro ha un interesse filosofico minore rispetto al precedente, poiché si limita a ripetere, in forma generale, i risultati ottenuti da Saggio per due dimensioni – risultati che, se estesi a *n* dimensioni, si riducono a mere costruzioni matematiche. Ciononostante, l'articolo è importante, sia per il ripristino della curvatura negativa, che era stata trascurata da Helmholtz, sia per il trattamento analitico dei risultati di Lobatchewsky – un trattamento che, insieme a quello di Saggio, ha finalmente restituito loro l'importanza che meritavano.

Terzo periodo.

30. Il terzo periodo si differenzia radicalmente, sia nei metodi e negli obiettivi, sia nelle idee filosofiche di fondo, dal periodo che ha sostituito. Mentre nel secondo periodo tutto ruotava attorno alla misurazione, con il suo apparato di congruenza, mobilità libera, corpi rigidi e quant'altro, questi elementi scompaiono completamente nel terzo periodo, il quale, virando all'estremo opposto, considera la quantità una categoria del tutto irrilevante in geometria e rinuncia alla congruenza e al metodo di sovrapposizione. Le idee di questo periodo, purtroppo, non hanno trovato un esponente filosofico come Riemann o Helmholtz, ma sono state esposte solo da matematici tecnici. Inoltre, il cambiamento delle idee fondamentali, che è immenso, non ha comportato un cambiamento altrettanto grande nella procedura effettiva; infatti, sebbene la quantità spaziale non faccia più parte della geometria proiettiva, la quantità è ancora impiegata e abbiamo ancora equazioni, trasformazioni algebriche e così via. Ciò può facilmente generare confusione, soprattutto nella mente dello studente, che non si rende conto che le quantità utilizzate, nella misura in cui le proposizioni sono effettivamente proiettive, sono semplici nomi per i punti e non, come nella geometria metrica, vere e proprie grandezze spaziali.

Tuttavia, la differenza fondamentale tra questo periodo e il precedente deve colpire chiunque immediatamente. Mentre Riemann e Helmholtz si occupavano di idee metriche e prendevano come fondamenti la misura della curvatura e la formula dell'elemento lineare – entrambe puramente metriche – il nuovo metodo si basa sulle formule di trasformazione delle coordinate necessarie per esprimere una data collineazione. Inizia riducendo tutte le cosiddette nozioni metriche – distanza, angolo, ecc. – a forme proiettive, e ottiene, da questa riduzione, un'unità e una semplicità metodologica prima impossibili. Questa riduzione dipende, tuttavia, tranne nei casi in cui la costante spaziale è negativa, da figure immaginarie

– in Euclide, il cerchio punta all'infinito; è inoltre puramente simbolica e analitica, e deve essere considerata filosoficamente irrilevante. Poiché la questione relativa all'importanza di questa riduzione è di fondamentale importanza per la nostra teoria della geometria, e poiché Cayley, nel suo discorso presidenziale alla British Association nel 1883, sfidò formalmente i filosofi a discutere l'uso degli immaginari, da cui essa dipende, tratterò questo argomento in modo piuttosto approfondito. Ma prima vediamo come, dal punto di vista matematico, si realizza la riduzione.

31. Scopriremo, nel corso di questo periodo, che quasi ogni proposizione importante, sebbene fuorviante nella sua interpretazione ovvia, ha tuttavia, se interpretata correttamente, un ampio significato filosofico. Lo stesso vale per l'opera di*Cayley*, il pioniere del metodo proiettivo.

La formula proiettiva per gli angoli, nella geometria euclidea, fu ottenuta per la prima volta da Laguerre nel 1853. Questa formula aveva, tuttavia, un carattere perfettamente euclideo, e fu Cayley a generalizzarla in modo da includere sia gli angoli che le distanze nei sistemi euclidei e non euclidei [[38] .

Cayley fu, fino all'ultimo, un convinto sostenitore dello *spazio* euclideo , sebbene credesse che *geometrie* non euclidee potessero essere applicate, all'interno dello spazio euclideo, mediante un cambiamento nella definizione di distanza [[39] . In tal modo, nonostante la sua ortodossia euclidea, fornì ai sostenitori della possibilità di spazi non euclidei una delle loro armi più potenti. Nel suo "Sesto Memoir on Quantics" (1859), si pose il compito di "stabilire la nozione di distanza su principi puramente descrittivi". Dimostrò che, con la nozione ordinaria di distanza, essa può essere resa proiettiva facendo riferimento ai punti circolari e alla linea all'infinito, e che lo stesso vale per gli angoli [[40] . Non contento di ciò, suggerì una nuova definizione di distanza, come l'inverso del seno o del coseno di una certa funzione delle coordinate; Con questa definizione, le proprietà solitamente note come metriche diventano proprietà proiettive, riferite a una certa conica, chiamata da Cayley l'Assoluto. (I punti circolari sono, analiticamente, una conica degenere, cosicché la geometria ordinaria costituisce un caso particolare di quanto sopra.) Egli dimostra che, quando l'Assoluto è una conica *immaginaria* , la geometria così ottenuta per due dimensioni è la geometria sferica. La corrispondenza con Lobatchewsky, nel caso in cui l'Assoluto sia *reale* , non viene elaborata: infatti, in tutto il testo, non vi è alcuna prova di familiarità con sistemi non euclidei. L'importanza del saggio, per Cayley, risiede interamente nella sua dimostrazione che la geometria metrica è solo una branca della geometria descrittiva.

32. La connessione della teoria della distanza di Cayley con la metageometria fu evidenziata per la prima volta daKlein [[41] . Klein dimostrò in dettaglio che, se l'Assoluto è reale, otteniamo il sistema (iperbolico) di Lobatchewsky; se è immaginario, otteniamo la geometria sferica o un nuovo sistema, analogo a quello di Helmholtz, chiamato da Klein ellittico; se l'Assoluto è una coppia di punti immaginari, otteniamo la geometria parabolica, e se, in particolare, la coppia di punti sono i punti circolari, otteniamo l'ordinario sistema euclideo. Nella geometria ellittica, due rette nello stesso piano si incontrano in un solo punto, non in due come nel

sistema di Helmholtz. La distinzione tra i due tipi di geometria è difficile e verrà discussa in seguito.

33. Poiché tutti questi sistemi sono ottenuti da un piano euclideo, mediante una semplice alterazione nella definizione di distanza, Cayley e Klein tendono a considerare l'intera questione non come una questione di natura dello spazio, ma di definizione di distanza. Poiché questa definizione, secondo la loro visione, è perfettamente arbitraria, il problema filosofico svanisce:*lo spazio*rimane indiscusso possesso e l'unico problema rimanente è quello di convenzione econvenienza matematica [42] . Questa visione è stata espressa con forza da Poincaré: "Cosa si dovrebbe pensare", dice, "di questa domanda: la geometria euclidea è vera? La domanda è un nonsenso".

Gli assiomi geometrici, secondo lui, sono semplici convenzioni: sono

«definizioni mascherate [43] ». Così Klein rimprovera Beltrami per aver considerato il suo piano ausiliario come meramente ausiliario, e osserva che, se avesse conosciuto le Memorie di Cayley, avrebbe visto la relazione tra il piano e la pseudosfera molto più intima di quanto supponesse [44] . Una visione che rimuove completamente il problema dall'ambito della filosofia richiede, chiaramente, una discussione completa. A questa discussione ci dedicheremo ora.

34. La tesi in questione sembra essere sorta da una naturale confusione sulla natura delle coordinate impiegate. Coloro che sostengono tale tesi non hanno adeguatamente compreso, a mio avviso, che le loro coordinate non sono*spaziali*, come nella geometria metrica, ma semplici segni convenzionali, mediante i quali è possibile designare distintamente punti diversi. Non vi è quindi alcuna ragione, finché non avremo già la geometria metrica, per considerare una funzione delle coordinate come una migliore espressione della distanza rispetto a un'altra, purché sia preservata l'equazione fondamentale di addizione [45] . Pertanto, se le nostre coordinate sono considerate adeguate per tutta la geometria, si verifica un'indeterminatezza nell'espressione della distanza, che può essere evitata solo mediante una convenzione. Ma le coordinate proiettive – così sosterrà la nostra argomentazione – sebbene perfettamente adeguate per tutte le proprietà proiettive e del tutto libere da qualsiasi presupposto metrico, sono inadeguate a esprimere proprietà metriche, proprio perché non hanno alcun presupposto metrico. Quindi, laddove sono in gioco proprietà metriche, Beltrami rimane giustificato rispetto a Klein; La riduzione delle proprietà metriche a quelle proiettive è solo apparente, sebbene l'indipendenza di queste ultime, rispetto alla geometria metrica, sia perfettamente reale.

35. Ma cosa sono le coordinate proiettive e come vengonointrodotte? Questa domanda non è stata affrontata nelle Memorie di Cayley, e sembrava, pertanto, che l'uso delle coordinate per definire la distanza comportasse un errore logico. Infatti, in tutti i sistemi precedenti, le coordinate erano state dedotte dalla distanza; utilizzare un qualsiasi sistema di coordinate esistente per definire la distanza significava, di conseguenza, incorrere in un circolo vizioso. Cayley menziona questa difficoltàin una nota, dove si limita tuttavia a osservare di aver

considerato le sue coordinate come numeri assegnati arbitrariamente, su un sistema non ulteriormente studiato, a punti diversi. La difficoltà è stata trattata a lungo da Sir R. Ball (Theory of the Content, Trad. RIA 1889), il quale sostiene che se i valori delle nostre coordinate implicano già la consueta misura di distanza, allora dare una nuova definizione, pur mantenendo le coordinate usuali, significa incorrere in una contraddizione. Egli afferma (op. cit. p. 1): "Nello studio della geometria non euclidea ho spesso avvertito una difficoltà che, so, è stata condivisa anche da altri. In quella teoria sembra che si cerchi di sostituire la nostra nozione ordinaria di distanza tra due punti con il logaritmo di un certorapporto anarmonico [46] . Ma questo rapporto stesso implica la nozione di distanza misurata nel modo ordinario. Come possiamo, dunque, sostituire la nostra vecchia nozione di distanza con la nozione non euclidea, dal momento che la definizione stessa di quest'ultima implica la prima?"

36. Dobbiamo ammettere che questa obiezione è valida, purché il rapporto anarmonico sia definito nel modo metrico ordinario. Sarebbe valida, ad esempio, contro qualsiasi tentativo di fondare una nuova definizione di distanza sulla descrizione delrapporto anarmonico di Cremona [47] , in cui appare come una proprietà metrica non alterata dalla trasformazione proiettiva. Se si vuole evitare un errore logico, infatti, bisogna evitare qualsiasi riferimento alla grandezza spaziale di qualsiasi tipo; poiché ogni grandezza spaziale, come verrà dimostratoin seguito [48] , dipende logicamente dalla grandezza fondamentale della distanza. Il rapporto anarmonico e le coordinate devono essere definiti da proprietà puramente descrittive, se l'uso che se ne farà in seguito deve essere libero da presupposti metrici e quindi dalle obiezioni di Sir R. Ball.

Una tale definizione è stata fornita in modo soddisfacente da Klein [49] , il quale si appella, a tal fine, alla costruzione quadrilatera di v. Staudt [50] . Con questa costruzione, che ho riprodotto schematicamente nel Capitolo III , Sezione A , § 112 e segg. , otteniamo una definizione puramente descrittiva di rapporto armonico e anarmonico e, data una coppia di punti, possiamo ottenere il coniugato armonico di un qualsiasi terzo punto sulla stessa retta. Su questa costruzione si basa l'introduzione delle coordinate proiettive. Partendo da tre punti qualsiasi su una retta, assegniamo loro arbitrariamente i numeri 0, 1, ∞. Troviamo quindi il coniugato armonico del primo rispetto a 1, ∞, e gli assegniamo il numero 2. L'obiettivo di assegnare questo numero piuttosto che un altro è quello di ottenere il valore –1 per il rapporto anarmonico dei quattro numeri corrispondenti ai quattro punti [51] . Troviamo quindi il coniugato armonico del punto 1, rispetto a 2, ∞, e gli assegniamo il numero 3; e così via. Klein ha dimostrato che con questa costruzione possiamo ottenere un numero qualsiasi di punti e possiamo costruire un punto corrispondente a qualsiasi numero dato, frazionario o negativo. Inoltre, quando due insiemi di quattro punti hanno lo stesso rapporto anarmonico, definito in modo descrittivo [52] , anche i numeri corrispondenti hanno lo stesso rapporto anarmonico. Introducendo un tale sistema numerico su due rette, o su tre, otteniamo le coordinate di qualsiasi punto in un piano, o nello spazio. Con questa costruzione, che è di fondamentale importanza per la geometria proiettiva, l'errore logico su cui Sir R. Ball basa la sua critica viene evitato in modo soddisfacente. Le nostre coordinate sono introdotte con un metodo puramente descrittivo e non implicano alcun presupposto sulla misurazione della distanza.

37. Con questo sistema di coordinate, dunque, definire la distanza come una certa funzione delle coordinate non significa cadere in un circolo vizioso. Ma non ne consegue affatto che la definizione di distanza sia arbitraria. Finora ogni riferimento alla distanza è stato escluso, per evitare idee metriche; ma quando la distanza viene introdotta, le idee metriche inevitabilmente riemergono, e dobbiamo ricordare che le nostre coordinate non forniscono alcuna informazione,*a prima vista*, su nessuna di queste idee metriche. Naturalmente, se lo desideriamo, possiamo continuare a escludere la distanza nel senso ordinario, come quantità di una linea retta finita, e definire la*parola*distanza in qualsiasi modo ci piaccia. Ma il concetto che la parola ha finora rappresentato richiederà allora un nuovo nome, e l'unico risultato sarà una confusione tra il*apparente* delle nostre proposizioni, per coloro che conservano le associazioni proprie del vecchio senso della parola, e il*reale* , derivante dal nuovo senso in cui la parola viene usata.

Credo che questa confusione si sia effettivamente verificata nel caso di coloro che considerano la questione tra Euclide e la Metageometria come una questione di definizione di distanza. La distanza è una relazione quantitativa e, come tale, presuppone l'identità di qualità. Ma la geometria proiettiva si occupa solo di qualità – per questo motivo è detta descrittiva – e non può distinguere tra due figure che sono qualitativamente simili. Ora, il significato di somiglianza qualitativa, in geometria, è la possibilità di trasformazione reciproca mediante una collineazione [53] . Due coppie di punti sulla stessa retta, quindi, sono qualitativamente simili; la loro unica relazione qualitativa è la retta, che entrambe le coppie hanno in comune; ed è proprio l'identità qualitativa delle relazioni delle due coppie che permette di trattare in modo esaustivo la differenza delle loro relazioni mediante la quantità, come una differenza di distanza. Ma laddove la quantità è esclusa, due coppie di punti sulla stessa retta appaiono simili, e persino due gruppi di tre: poiché tre punti su una retta possono essere trasformati proiettivamente in altri tre punti. È solo con *quattro* punti allineati che acquisiamo una proprietà proiettiva che li distingue da altri insiemi di quattro, e questa proprietà è il rapporto anarmonico, definito in termini descrittivi. Il geometro proiettivo, pertanto, non vede alcuna ragione di dare un nome alla relazione tra due punti, nella misura in cui questa relazione è qualcosa di più della linea retta illimitata su cui giacciono; e quando introduce la nozione di distanza, la definisce, nell'unico modo in cui i principi proiettivi glielo consentono, come una relazione tra *quattro* punti. Poiché desidera tuttavia che il termine gli conferisca il potere di distinguere tra diverse *coppie* di punti, accetta di considerare fissi due dei quattro punti. In questo modo, le uniche variabili nella distanza sono i due punti rimanenti, e la distanza appare, quindi, come una funzione di *due* variabili, vale a dire le coordinate dei due punti variabili. Quando abbiamo ulteriormente definito la nostra funzione in modo che la distanza possa essere additiva, abbiamo una funzione con molte delle proprietà della distanza nel senso ordinario. Questa funzione, pertanto, il geometro proiettivo considera come l'unica definizione corretta di distanza.

Possiamo infatti constatare, dal modo in cui sono state introdotte le nostre coordinate proiettive, che *una qualche* funzione di queste coordinate deve esprimere la distanza nel senso ordinario. Esse sono state introdotte in modo sequenziale, cosicché, procedendo dal

punto zero verso il punto infinito, le nostre coordinate crescevano continuamente. Ad ogni punto corrispondeva una coordinata definita: alla distanza tra due punti variabili, quindi, deve corrispondere una funzione definita delle coordinate, in quanto funzione indipendente da altre variabili, poiché queste sono a loro volta funzioni dei rispettivi punti. La funzione discussa sopra, pertanto, deve certamente includere la distanza nel senso ordinario.

Ma la natura arbitraria e convenzionale della distanza, come sostenuto da Poincaré e Klein, deriva dal fatto che i due punti fissi, necessari per determinare la nostra distanza in senso proiettivo, possono essere scelti arbitrariamente, e sebbene, una volta fatta la nostra scelta, due punti qualsiasi abbiano una distanza definita, tuttavia, a seconda di come facciamo quella scelta, la distanza diventerà una funzione diversa dei due punti variabili. L'ambiguità così introdotta è inevitabile secondo i principi proiettivi; ma dobbiamo forse concludere, da ciò, che sia realmente inevitabile? Non dovremmo piuttosto concludere che la geometria proiettiva non è in grado di trattare adeguatamente la distanza? Se *A* , *B* , *C* sono tre punti diversi su una retta, deve esserci *qualche* differenza tra la relazione tra *A* e *B* e tra *A* e *C* , perché altrimenti, a causa dell'identità qualitativa di tutti i punti, *B* e *C* non potrebbero essere distinti. Ma tale differenza implica una relazione, tra *A* e *B* , che è indipendente dagli altri punti sulla retta; perché se non abbiamo una tale relazione, gli altri punti non possono essere distinti come diversi. Prima di poter distinguere i due punti fissi, dunque, da cui parte la definizione proiettiva, dobbiamo già supporre una qualche relazione, tra due punti qualsiasi sulla nostra retta, in cui essi siano indipendenti da altri punti; e questa relazione è la distanza nel senso ordinario [54] . Quando abbiamo misurato questa relazione quantitativa con i metodi ordinari della geometria metrica, possiamo procedere a decidere quali punti base devono essere scelti, sulla nostra retta, affinché la funzione proiettiva discussa sopra possa avere lo stesso valore della distanza ordinaria. Ma la scelta di questi punti base, quando si parla di distanza nel senso ordinario, non è arbitraria, e la loro introduzione è solo un espediente tecnico . La distanza, nel senso ordinario, rimane una relazione tra *due* punti, non tra *quattro* ; ed è la mancata percezione che il senso proiettivo differisce da, e non può sostituire, il senso ordinario, che ha dato origine alle opinioni di Klein e Poincaré. La questione non è di convenzione, ma delle irriducibili proprietà metriche dello spazio. Per riassumere: le quantità, come usate nella geometria proiettiva, non rappresentano grandezze spaziali, ma sono simboli convenzionali per relazioni spaziali puramente qualitative. Ma la distanza, *quâ*La quantità presuppone l'identità di qualità, come condizione di confronto quantitativo. La distanza, nel senso ordinario, è, in breve, quella relazione quantitativa tra due punti su una retta, mediante la quale si può definire la loro differenza da altri punti. La definizione proiettiva, tuttavia, non essendo in grado di distinguere un insieme di meno di quattro punti da qualsiasi altro sulla stessa retta, fa sì che la distanza dipenda da altri due punti oltre a quelli di cui definisce la relazione. Non rimane quindi alcun nome per la distanza nel senso ordinario, e molti geometri proiettivi, avendo abolito il nome, credono che anche la cosa stessa sia stata abolita, e sono inclini a negare che *due* punti abbiano una relazione univoca. Questa confusione, nella geometria proiettiva, mostra l'importanza di un nome e dovrebbe

renderci cauti nel permettere che nuovi significati oscurino una delle proprietà fondamentali dello spazio.

38. Resta da discutere il modo in cui le geometrie non euclidee derivano dalla definizione proiettiva della distanza, nonché la vera interpretazione da dare a questa visione della metageometria. Si noti che i metodi proiettivi che seguono Cayley si occupano interamente di un piano euclideo, sul quale introducono diverse misure di distanza. Da ciò deriva, in qualsiasi interpretazione di questi metodi, un'apparente subordinazione degli spazi non euclidei, come se questi fossero meno autosufficienti di quello euclideo. Questa subordinazione non è l'intento di quanto segue; al contrario, la correlazione con lo spazio euclideo è considerata preziosa, in primo luogo perché lo spazio euclideo è stato studiato più a lungo ed è più familiare, ma in secondo luogo perché questa correlazione dimostra, se correttamente interpretata, che gli altri spazi sono autosufficienti. Possiamo limitarci, nella discussione di questa interpretazione, principalmente alle distanze misurate lungo una singola linea retta. Dobbiamo però fare attenzione a ricordare che la definizione metrica di distanza – che, secondo la tesi qui sostenuta, è l'unica definizione adeguata – è la stessa negli spazi euclidei e non euclidei; argomentare a suo favore non significa, quindi, argomentare a favore di Euclide.

Lo schema proiettivo delle coordinate consiste in una serie di numeri, ognuno dei quali rappresenta un certo rapporto anarmonico e denota un solo punto, e che aumentano uniformemente con la distanza da un'origine fissa, fino a diventare infiniti in corrispondenza di un certo punto. Ora Cayley dimostrò che, nella geometria euclidea, la distanza può essere espressa come il limite del logaritmo del rapporto anarmonico dei due punti e dei punti (coincidenti) all'infinito sulla loro retta; mentre, se si suppone che i punti all'infinito siano distinti, si ottiene la formula per la distanza nella geometria iperbolica o sferica, a seconda che questi punti siano reali o immaginari. Ne consegue quindi che, con la definizione proiettiva di distanza, otterremo precisamente le formule della geometria iperbolica, parabolica o sferica, a seconda di quale punto, al quale viene assegnato il valore $+\infty$, si trovi a una distanza finita, infinita o immaginaria (nel senso ordinario) dal punto al quale assegniamo il valore 0. La nostra retta rimane, nel frattempo, una normale retta euclidea. Ma abbiamo visto che la definizione proiettiva di distanza si adatta alla vera definizione solo quando i due punti fissi a cui si riferisce sono scelti in modo appropriato. Ora, il significato ordinario di distanza è richiesto sia nelle geometrie non euclidee che in quelle euclidee: infatti, queste geometrie differiscono solo per le proprietà metriche. Pertanto, la nostra retta *euclidea* , sebbene possa servire a illustrare geometrie diverse da quella euclidea, può essere trattata correttamente solo da Euclide. Quando diamo una definizione di distanza diversa da quella di Euclide, rimaniamo comunque nel dominio delle proprietà puramente proiettive e non ricaviamo alcuna informazione sulle proprietà metriche della nostra retta. Ma l'importanza, per la metageometria, di questa nuova interpretazione risiede nel fatto che, avendo stabilito indipendentemente le formule metriche degli spazi non euclidei, scopriamo, come nel Saggio di Beltrami, che questi spazi possono essere correlati, tramite una corrispondenza omografica, con i punti dello spazio euclideo; e che ciò può essere realizzato in modo tale da

fornire, per la distanza tra due punti del nostro spazio non euclideo, la misura iperbolica o sferica della distanza per i corrispondenti punti dello spazio euclideo.

39. Nel complesso, dunque, una modifica del punto di vista di Sir R. Ball, che è praticamente un'affermazione generalizzata del metodo di Beltrami, sembra la più plausibile. Egli immagina ciò che, con Grassmann, chiama un Contenuto,*cioè* una varietà tridimensionale perfettamente generale, e poi correla i suoi elementi, uno per uno, con punti nello spazio euclideo. Così ogni elemento del Contenuto acquisisce, come coordinate, le normali coordinate euclidee del punto corrispondente nello spazio euclideo. Per mezzo di questa correlazione, i nostri calcoli, sebbene si riferiscano al Contenuto, vengono eseguiti, come nel Saggio di Beltrami, nello spazio euclideo ordinario. Così la confusione scompare, ma con essa scompare anche la presunta interpretazione euclidea. Il Contenuto di Sir R. Ball, se deve essere uno spazio, deve essere uno spazio radicalmente diverso da quellodi Euclide [55] ; Parlare, come fa Klein, di piani ordinari con misure di distanza iperboliche o ellittiche, significa incorrere in una contraddizione o rinunciare a qualsiasi significato metrico della distanza. Invece di piani ordinari, abbiamo superfici come quelle di Beltrami, a curvatura costante; invece dello spazio euclideo, abbiamo lo spazio iperbolico o sferico. Allo stesso tempo, resta vero che possiamo, con il metodo di Klein, attribuire un significato euclideo a ogni proposizione simbolica nella geometria non euclidea. Infatti, sostituendo alla distanza il logaritmo a cui si è accennato in precedenza, otteniamo, dal risultato non euclideo, un risultato che deriva dagli assiomi euclidei ordinari. Questa corrispondenza elimina, una volta per tutte, la possibilità di una contraddizione latente nella metageometria, poiché a una proposizione in un sistema corrisponde una e una sola proposizione nell'altro, e risultati contraddittori in un sistema, quindi, corrisponderebbero a risultati contraddittori nell'altro. Pertanto, la metageometria non può condurre a contraddizioni, a meno che la geometria euclidea, allo stesso tempo, non conduca a contraddizioni corrispondenti. Così, il piano euclideo con misura di distanza iperbolica o ellittica, sebbene contraddittorio o non metrico come concetto indipendente, ha, come ausilio nell'interpretazione di risultati non euclidei, un altissimo grado di utilità.

40. Dobbiamo ancora discutere il terzo tipo di geometria non euclidea di Klein, che egli chiama ellittica. La differenza tra questa e la geometria sferica è difficile da cogliere, ma può essere illustrata con un esempio più semplice. Un piano, come tutti sanno, può essere avvolto, senza stiramento, attorno a un cilindro, e le rette nel piano diventano, per mezzo di questa operazione, geodetiche sul cilindro. Le geometrie del piano e del cilindro, quindi, hanno molto in comune. Ma poiché il cerchio generatore del cilindro, che è una delle sue geodetiche, è finito, solo una porzione del piano viene utilizzata per avvolgerlo una volta attorno al cilindro. Pertanto, se cerchiamo di stabilire una corrispondenza punto a punto tra il piano e il cilindro, troveremo una serie infinita di punti sul piano per un singolo punto sul cilindro. Così accade che le geodetiche, pur avendo sul piano un solo punto in comune, possano avere sul cilindro un numero infinito di intersezioni. Un rapporto in qualche modo simile esiste tra le geometrie sferica ed ellittica. A ogni punto nello spazio ellittico corrispondono due punti nello spazio sferico. Pertanto, le geodetiche, che nello spazio sferico

possono avere due punti in comune, nello spazio ellittico non possono mai avere più di un punto di intersezione.

Ma il metodo di Klein può dimostrare solo che la geometria ellittica vale per il piano euclideo ordinario con misura ellittica della distanza. Klein ha fatto grandi sforzi per imporre la distinzione tra la geometria sferica e quella ellittica [56] , ma non è immediatamente evidente che quest'ultima, a differenza della prima, sia valida.

In primo luogo, la geometria ellittica di Klein, che si presenta come uno dei sistemi metrici alternativi su un piano euclideo o in uno spazio euclideo, non è di per sé sufficiente, se la discussione precedente è stata corretta, a dimostrare la possibilità di uno spazio ellittico, *cioè* di uno spazio avente una corrispondenza punto a punto con lo spazio euclideo, e avente come distanza ordinaria tra due dei suoi punti la definizione ellittica della distanza tra punti corrispondenti dello spazio euclideo. Per dimostrare questa possibilità, dobbiamo adottare il metodo diretto di Newcomb (Crelle's Journal, Vol. 83). Ora, in primo luogo Newcomb non ha dimostrato che i suoi postulati siano autoconsistenti; ha solo fallito nel dimostrare che sono contraddittori [57] . Ciò lascerebbe lo spazio ellittico nella stessa posizione in cui Lobatchewsky e Bolyai hanno lasciato lo spazio iperbolico. Ma inoltre sembra esserci, a prima vista, nello spazio ellittico *bidimensionale* , una contraddizione positiva. Per spiegare ciò, tuttavia, sarà necessario illustrare le peculiarità del piano ellittico.

Il piano ellittico, considerato come una figura nello spazio ellittico tridimensionale, è ciò che viene chiamata una doppia superficie [58] , *ovvero,* come dice Newcomb (*loc. cit.* p. 298): "I due lati di un piano completo non sono distinti, come in una superficie euclidea... Se... un essere dovesse viaggiare a una distanza di 2D *,* al suo ritorno si troverebbe sulla superficie opposta a quella da cui è partito, e dovrebbe ripetere il viaggio per tornare alla sua posizione originale senza lasciare la superficie". Ora, se immaginiamo uno spazio ellittico *bidimensionale* , la distinzione tra i lati di un piano diventa priva di significato, poiché acquisisce significato solo in riferimento alla terza dimensione. Tuttavia, una tale distinzione ci verrebbe imposta. Supponiamo, ad esempio, di prendere un piccolo cerchio con una freccia, come nella figura, e di muovere questo cerchio una volta intorno all'universo. Allora il senso della freccia sarebbe invertito. Saremmo dunque costretti a considerare la nuova posizione distinta dalla precedente, che trasforma il nostro piano in un piano sferico, oppure ad attribuire l'inversione della freccia all'azione di un moto che riporta il nostro cerchio alla sua posizione originaria. Va osservato che solo un movimento attorno all'universo sarebbe sufficiente a invertire il senso della freccia. Questa inversione *sembra* un'azione dello spazio vuoto, che ci costringerebbe a considerare i punti che, da un punto di vista tridimensionale, sono coincidenti sebbene opposti, come realmente distinti, riducendo così l'ellittica al piano sferico. Ma è il moto, non lo spazio, a causare realmente il cambiamento, e quindi non si dimostra che il piano ellittico sia impossibile. La questione, tuttavia, non riveste grande importanza filosofica.

41. In relazione alla riduzione della geometria metrica ageometria proiettiva, abbiamo un ulteriore argomento di discussione. Si tratta dell'uso geometrico degli immaginari, mediante il

quale, fatta eccezione per lo spazio iperbolico, si realizza la riduzione. Ho già sostenuto, per altri motivi, che questa riduzione, nonostante la sua immensa importanza tecnica e nonostante la completa indipendenza logica della geometria proiettiva dalle idee metriche, è*puramente*tecnica e non filosoficamente valida. La stessa conclusione emergerà se prenderemo in esame la sfida lanciata da Cayley alla British Association, nel suo discorso presidenziale del 1883.

In questo discorso, il professor Cayley dedicò la maggior parte del suo tempo ai sistemi non euclidei. Gli spazi non euclidei , dichiarò, gli sembravano *a priori errati* [59] *; ma le geometrie* non euclidee , qui come nei suoi lavori matematici, erano accettate come derivanti da un cambiamento nella definizione di distanza. Questa visione è già stata discussa e non necessita, pertanto, di ulteriori critiche in questa sede. Ciò di cui desidero parlare è la questione con cui lo stesso Cayley aprì il suo discorso, vale a dire l'uso e il significato geometrico delle quantità immaginarie. Dal modo in cui parlò di questa questione, diventa imperativo trattarla in modo piuttosto approfondito. Infatti disse (pp. 8-9):

"... La nozione che è veramente fondamentale (e non posso sottolineare abbastanza questa affermazione) che sottende e pervade l'intera nozione di analisi e geometria moderna, [è] quella di grandezza immaginaria in analisi, e di spazio immaginario (o spazio come *luogo in quo* di punti e figure immaginarie) in geometria: uso in entrambi i casi la parola immaginario includendo il reale... Anche se si giungesse alla conclusione che la nozione appartiene alla mera matematica tecnica, o si riferisce a entità inesistenti rispetto alle quali non è possibile alcuna scienza, mi sembra comunque che (come oggetto di discussione filosofica) la nozione non debba essere ignorata; si dovrebbe quantomeno dimostrare che esiste il diritto di ignorarla."

42. Questo è ora il mio scopo da dimostrare. Ma per timore che i non matematici possano fraintendere il senso dell'osservazione di Cayley (che a volte è stata erroneamente supposta riferirsi a spazi non euclidei), posso anche spiegare, fin da subito, che questa questione è radicalmente distinta dalla validità odall'importanzadella Metageometria ed è solo indirettamente connessa ad essa. Unaimmaginariaè una quantità che coinvolge $\sqrt{-1}$:la sua forma più generale è$a+\sqrt{-1}b$dove a e b sono reali; Cayley usa la parola immaginaria in modo da includere i reali, per coprire il caso speciale in cui$b=0$. Sarà conveniente, in ciò che segue, escludere questo significato più ampio e supporre che$b$ siazero. Un punto immaginario è un punto le cui coordinate coinvolgono $\sqrt{-1}$,*cio*èle cui coordinate sono quantità immaginarie. Una curva immaginaria è una curva i cui punti sono immaginari, o, in alcuni usi particolari, una curva la cui equazione contiene coefficienti immaginari. Non è necessario qui discutere le sottigliezze matematiche a cui questa nozione conduce; il lettore interessato troverà un'eccellente trattazione elementare dei loro usi geometrici in Klein, Nicht-Euklid,II,pp. 38-46. Ma per il nostro scopo attuale, possiamo limitarci ai punti immaginari. Se si scopre che questi hanno un significato meramente tecnico e sono privi di qualsiasi significato filosofico, allora lo stesso varrà per qualsiasi insieme di punti immaginari,*ovvero*per qualsiasi curva o superficie immaginaria.

Che la nozione di punti immaginari sia di suprema importanza in geometria sarà evidente a chiunque rifletta sul fatto che i punti circolari sono immaginari e che la riduzione della geometria metrica a geometria proiettiva, che è uno dei più grandi successi di Cayley, dipende da questi punti. Tuttavia, discutere adeguatamente il loro significato filosofico mi risulta difficile, poiché non conosco alcuna filosofia soddisfacente dei numeri immaginari nell'algebra pura. Adotterò quindi l'ipotesi più favorevole e supporrò che non si possano sollevare obiezioni valide contro questo utilizzo. Anche in base a questa ipotesi, ritengo che non si possa addurre alcuna argomentazione a favore dei punti immaginari in geometria.

Innanzitutto, dobbiamo escludere, dai punti immaginari considerati, quelli le cui coordinate sono immaginarie solo con determinati sistemi di coordinate speciali. Ad esempio, se una delle coordinate di un punto è la tangente da esso a una sfera, questa coordinata sarà immaginaria per qualsiasi punto interno alla sfera, eppure il punto è perfettamente reale. Un punto, quindi, si dice immaginario solo quando, qualunque sistema di coordinate reali adottiamo, una o più delle grandezze che esprimono queste coordinate rimangono immaginarie. A tal fine, è matematicamente sufficiente supporre che le nostre coordinate siano cartesiane: un punto le cui coordinate cartesiane sono immaginarie è un vero punto immaginario nel senso sopra descritto.

Per discutere il significato di tale affermazione, è necessario considerare brevemente la natura fondamentale della corrispondenza tra un punto e le sue coordinate. Supponendo che la geometria elementare abbia dimostrato – e credo che dimostri in modo soddisfacente – che le relazioni spaziali sono suscettibili di misurazione quantitativa, allora un dato punto avrà, con un opportuno sistema di coordinate, in uno spazio a *n* dimensioni, *n* relazioni quantitative con la figura spaziale fissa che forma gli assi cartesiani, e queste *n* relazioni quantitative saranno, con alcune riserve, uniche , *ovvero* nessun altro punto avrà le stesse quantità assegnate. (Con molti possibili sistemi di coordinate, quest'ultima condizione non si realizza: ma proprio per questo motivo sono scomodi e vengono impiegati solo in problemi particolari). Quindi, dato un sistema di coordinate e dato un qualsiasi insieme di quantità, queste quantità, *se determinano un punto* , lo determinano in modo univoco. Ma, per naturale estensione del metodo, la suddetta riserva viene meno e si assume che a *ogni* insieme di quantità debba corrispondere un punto. Per questa ipotesi non mi sembra esserci alcuna traccia di evidenza. Un postino potrebbe altrettanto presumere che, poiché ogni casa in una strada è univocamente determinata dal suo numero civico, debba esserci una casa per ogni numero immaginabile. Dobbiamo infatti sapere che un dato insieme di grandezze può rappresentare le coordinate di un punto nello spazio, prima che sia legittimo attribuire un significato spaziale a queste grandezze: e questa conoscenza, ovviamente, non può essere derivata da sole operazioni con le coordinate, pena un circolo vizioso. Per tornare all'analogia precedente, dobbiamo conoscere il numero di case in Piccadilly prima di sapere se a un dato numero corrisponde una casa o meno; e l'aritmetica da sola, per quanto impiegata con astuzia, non ci fornirà mai questa informazione.

La distinzione importante non è quindi quella tra quantità reali e immaginarie, ma tra quantità a cui corrispondono punti e quantità a cui non corrispondono punti. Possiamo convenzionalmente concordare di denotare i punti reali con coordinate immaginarie ‚ come nel metodo gaussiano di denotare con la singola quantità ($a + \sqrt{-1}\, b$) il punto le cui coordinate ordinarie sono a , b . Ma questo non tocca il significato di Cayley. Cayley intende dire che è di grande utilità in matematica considerare, come punti con un'esistenza reale nello spazio, i correlati spaziali ipotizzati di quantità che, con il sistema di coordinate impiegato, non hanno correlati nello spazio quotidiano; e che questa utilità è considerata da molti matematici come un'indicazione della validità di un'ipotesi così fruttuosa. Per fissare le nostre idee, consideriamo gli assi cartesiani nello spazio euclideo tridimensionale. Allora appare, per ispezione, che un punto può essere situato a qualsiasi distanza a destra o a sinistra di uno qualsiasi dei tre piani coordinati; Prendendo questa distanza come coordinata, risulta quindi che a tutte le quantità reali da -∞ a +∞ corrispondono punti reali. Lo stesso vale per le altre due coordinate; e poiché la geometria elementare dimostra che le loro variazioni sono reciprocamente indipendenti, sappiamo che a tre quantità reali corrisponde un solo punto reale. Sappiamo anche, dal metodo esaustivo seguito, che tutto lo spazio è coperto dall'intervallo di queste tre quantità variabili: un nuovo insieme di quantità, come quello introdotto dall'uso delle grandezze immaginarie, non possiede quindi alcun correlato spaziale e può essere supposto che ne possieda uno solo per una comoda finzione.

43. Il fatto che la finzione*sia*conveniente, tuttavia, potrebbe far pensare che essa sia più di una semplice finzione. Ma questa presunzione, credo, può essere facilmente confutata. Infatti, tutti gli usi fruttuosi delle grandezze immaginarie, in geometria, sono quelli che iniziano e finiscono con quantità reali, e usano le grandezze immaginarie solo per i passaggi intermedi. Ora, in tutti questi casi, abbiamo un'interpretazione spaziale reale all'inizio e alla fine del nostro ragionamento, dove soltanto l'interpretazione spaziale è importante: nei passaggi intermedi, trattiamoinmodo puramente algebrico quantità puramente algebriche e possiamo eseguire qualsiasi operazione algebricamente ammissibile. Se le quantità con cui concludiamo sono suscettibili di interpretazione spaziale, allora, e solo allora, il nostro risultato può essere considerato geometrico. Usare il linguaggio geometrico, in qualsiasi altro caso, è solo un comodo aiuto all'immaginazione. Parlare, ad esempio, di proprietà proiettive che si riferiscono ai punti circolari, è unamera *memoria tecnica*per proprietà puramente algebriche; I punti circolari non si trovano nello spazio, ma solo nelle quantità ausiliarie mediante le quali vengono trasformate le equazioni geometriche. Che non sorgano contraddizioni dall'interpretazione geometrica dei numeri immaginari non è sorprendente: essi vengono interpretati unicamente dalle regole dell'algebra, che possiamo ammettere valide nella loro applicazione ai numeri immaginari. Essendo la percezione dello spazio totalmente assente, l'algebra regna sovrana e non può sorgere alcuna incoerenza. Ovunque, anche solo per un istante, permettiamo alle nostre comuni nozioni spaziali di intromettersi, emergono le assurdità più grossolane: chiunque può vedere che un cerchio, essendo una curva chiusa, non può tendere all'infinito. Il metafisico che osasse inventare qualcosa di così

assurdo come i punti circolari verrebbe deriso. Ma il matematico può rubare il cavallo impunemente.

Infine, solo la conoscenza dello spazio, e non quella dell'algebra, può garantirci che un dato insieme di grandezze abbia un correlato spaziale, e in assenza di tale correlato, le operazioni con queste grandezze non hanno alcuna rilevanza geometrica. Questo è il caso delle grandezze immaginarie nel senso di Cayley, e il loro utilizzo in geometria, per quanto grandi siano i suoi vantaggi tecnici e rigida la sua validità tecnica, è del tutto privo di importanza filosofica.

44. Credo che abbiamo ormai discusso la maggior parte delle questioni riguardanti la portata e la validità del metodo proiettivo. Abbiamo visto che esso è indipendente da tutti i presupposti metrici e che il suo uso delle coordinate non implica l'assunzione che le grandezze spaziali siano misurate o espresse tramite esse. Abbiamo visto che è in grado di affrontare, con i suoi soli metodi, la questione della somiglianza qualitativa delle figure geometriche, che è logicamente precedente a qualsiasi confronto quantitativo, poiché la quantità presuppone la somiglianza qualitativa. Abbiamo anche visto che, per quanto si estenda il suo uso legittimo, si applica ugualmente a tutti gli spazi omogenei e che il suo criterio di uno spazio indipendentemente possibile — la determinazione di una linea retta mediante duepunti [60] —non è soggetto alle qualifiche e alle limitazioni che appartengono, come abbiamo visto nel caso del cilindro, al criterio metrico della curvatura costante. Abbiamo però anche visto che, quando la geometria proiettiva si sforza di affrontare la grandezza spaziale e di sottomettere alla sua influenza la distanza e la misurazione degli angoli, il suo successo, pur essendo tecnicamente valido e importante, è filosoficamente solo un successo apparente. La geometria metrica, pertanto, se si vuole applicare la quantità allo spazio, rimane una branca della matematica separata, sebbene logicamente successiva.

45. Non resta che spendere qualche parola su*Sophus Lie*. Come matematico, come inventore di un nuovo e potentissimo metodo di analisi, non si può che lodarlo. La geometria è solo una delle numerose discipline a cui si applica la sua teoria dei gruppi continui, ma la sua applicazione alla geometria ha rivoluzionato il metodo e ha reso possibile, in problemi come quelli di Helmholtz, un trattamento infinitamente più preciso ed esaustivo di qualsiasi altro fosse possibile in precedenza.

La definizione generale di gruppo è la seguente: se abbiamo un numero qualsiasi di variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, xn$, e una serie qualsiasi di trasformazioni di queste in nuove variabili — le trasformazioni sono definite da equazioni di forme specificate, con parametri che variano da una trasformazione all'altra — allora la serie di trasformazioni forma un *gruppo* se l'applicazione successiva di due trasformazioni qualsiasi è equivalente a un singolo elemento della serie di trasformazioni originale. Il gruppo è *continuo* quando possiamo passare, mediante gradazioni infinitesime all'interno del gruppo, da una qualsiasi delle trasformazioni a qualsiasi altra.

Ora, in geometria, il risultato di due moti o collineazioni successive di una figura può sempre essere ottenuto da un singolo movimento o collineazione, e qualsiasi movimento o collineazione può essere costruito da una serie di movimenti o collineazioni infinitesimali. Inoltre, l'espressione analitica di entrambi è una certa trasformazione delle coordinate di tutti i punti della figura [61] . Quindi le trasformazioni che determinano un movimento o una collineazione sono tali da formare un gruppo continuo. Ma la questione dell'equivalenza proiettiva di due figure, a cui è riconducibile tutta la geometria proiettiva, deve sempre essere trattata mediante una collineazione; e la questione dell'uguaglianza di due figure, a cui è riconducibile tutta la geometria metrica, deve sempre essere decisa da un movimento tale da causare la sovrapposizione; quindi l'intero argomento della geometria può essere considerato come una teoria dei gruppi continui che definiscono tutte le possibili collineazioni e moti.

Ora Sophus Lie ha sviluppato, in modo molto dettagliato, la teoria puramente analitica dei gruppi; ha quindi, con questo metodo di formulazione del problema, un'arma molto potente pronta all'attacco. In due articoli "Sui fondamenti della geometria [62] ", intrapresi su pressante richiesta di Klein, prende premesse che corrispondono approssimativamente a quelle di Helmholtz, omettendo la monodromia, e applica la teoria dei gruppi alla deduzione delle loro conseguenze [63] . Il lavoro di Helmholtz, dice, difficilmente può essere considerato come *una dimostrazione* delle sue conclusioni, e in effetti un'analisi più approfondita della teoria dei gruppi rivela diverse possibilità sconosciute a Helmholtz.

Tuttavia, in quanto pioniere, privo degli strumenti di Lie, Helmholtz merita, a mio avviso, più elogi di quanti Lie sia disposto a concedergli [64] .

Il metodo di Lie è perfettamente esaustivo; omettendo la premessa della monodromia, gli altri dimostrano che un corpo ha sei gradi di libertà, *ovvero* che il gruppo che descrive tutti i possibili moti di un corpo avrà sei membri indipendenti; se manteniamo un punto fisso, il numero di membri indipendenti si riduce a tre. Egli, quindi, a partire dalla sua teoria generale, enumera tutti i gruppi che soddisfano questa condizione. Affinché un tale gruppo dia luogo a moti possibili, è necessario, per il secondo assioma di Helmholtz, che esso lasci invariata una qualche funzione delle coordinate di due punti qualsiasi. Questo elimina diversi gruppi precedentemente enumerati, ognuno dei quali egli analizza a sua volta. Giunge così ai seguenti risultati:

I. *In due dimensioni* , affinché la libera mobilità sia valida *universalmente* , non esistono gruppi che soddisfino i primi tre assiomi di Helmholtz, ad eccezione di quelli che descrivono i moti euclidei e non euclidei ordinari; ma se essa è valida solo *all'interno di una certa regione* , esiste anche un possibile gruppo in cui la curva descritta da un qualsiasi punto di una rotazione non è chiusa, bensì una spirale equiangolare. Per escludere questa possibilità, è necessario l'assioma di monodromia di Helmholtz.

II. *In tre dimensioni* , i risultati contraddicono ulteriormente Helmholtz. Ipotizzando la libera mobilità solo *all'interno di una certa regione* , dobbiamo distinguere due casi: *o* la libera mobilità sussiste, all'interno di tale regione, in modo assoluto e senza eccezioni, *ovvero*

quando un punto è tenuto fermo, *ogni* altro punto all'interno della regione può muoversi liberamente su una superficie: in questo caso l'assioma di monodromia non è necessario e i primi tre assiomi sono sufficienti a definire il nostro gruppo come quello dei moti euclidei e non euclidei. *Oppure* la libera mobilità, all'interno della regione specificata, sussiste solo per ogni punto *di posizione generica* , mentre i punti di una certa retta, quando un punto è fisso, possono muoversi solo su quella retta, non su una superficie: in questo caso, sono possibili altri gruppi, che possono essere esclusi solo dal quarto assioma di Helmholtz.

Avendo ora esposto i risultati puramente matematici delle indagini di Lie, possiamo tornare alle considerazioni filosofiche, mediante le quali

Il lavoro di Helmholtz era principalmente motivato da ragioni. Diventa evidente, non solo che le eccezioni all'interno di una certa regione, ma anche la limitazione a una certa regione dell'assioma di libera mobilità, sono filosoficamente impossibili e inconcepibili. Come può una certa linea, o una certa superficie, formare una barriera invalicabile nello spazio, o avere una mobilità diversa da quella di tutte le altre linee o superfici? Tale nozione non può essere ammessa in filosofia nemmeno per un istante, poiché distrugge l'assioma più fondamentale di tutti, l'omogeneità dello spazio. Non solo possiamo, quindi, ma dobbiamo interpretare l'assioma di libera mobilità di Helmholtz nel suo senso più stretto; l'assioma di monodromia diventa così superfluo sia matematicamente che filosoficamente. Questo è, da un punto di vista filosofico, il più importante dei risultati di Lie.

46. Sono giunto alla fine della mia storia della Metageometria. Non era mio intento fornire un resoconto esaustivo nemmeno delle opere più importanti sull'argomento – soprattutto nel terzo periodo, i nomi di Poincaré, Pasch, Cremona, Veronese e altri che avrei potuto menzionare, mi avrebbero fatto vergognare, se avessi avuto un simile obiettivo. Ho cercato, tuttavia, di esporre, nel modo più chiaro possibile, i principi operanti nei vari periodi, le motivazioni e i risultati delle teorie successive. Abbiamo visto come la motivazione filosofica, inizialmente predominante, sia stata gradualmente soppiantata dallo spirito puramente matematico e tecnico dei geometri più recenti. Inizialmente, screditare l'Estetica trascendentale sembrava, ai metageometri, tanto importante quanto far progredire la loro scienza; ma dalle opere di Cayley, Klein o Lie, nessun lettore potrebbe dedurre che Kant sia mai esistito. Abbiamo anche visto, tuttavia, che mentre l'interesse*per*la filosofia diminuiva, l'interesse*per*la filosofia aumentava: man mano che i risultati matematici si liberavano dalle controversie filosofiche, assumevano gradualmente una forma stabile, dalla quale, possiamo ragionevolmente sperare, l'ulteriore sviluppo avverrà sotto forma di crescita, piuttosto che di trasformazione. Credo che lo stesso graduale sviluppo a partire dalla filosofia si possa rintracciare anche negli albori della maggior parte delle branche della matematica; quando le motivazioni filosofiche cessano di operare, questo è, in generale, un segno che la fase di incertezza riguardo alle premesse è passata, cosicché il futuro appartiene interamente alla tecnica matematica. Quando questa fase stabile è stata raggiunta, è tempo che la filosofia prenda in prestito dalla scienza, accettandone le premesse finali come quelle imposte da una reale necessità di fatto o di logica.

47. Ora, discutendo i sistemi di metageometria, abbiamo trovato due tipi, radicalmente distinti e soggetti ad assiomi differenti. Il tipo storicamente precedente, che si occupa di idee metriche, discute, in primo luogo, le condizioni di libera mobilità, essenziali per ogni misurazione dello spazio. Trova l'espressione analitica di queste condizioni nell'esistenza di una costante spaziale, o misura costante di curvatura, che è equivalente all'omogeneità dello spazio. Questo è il suo primo assioma.

Il suo secondo assioma afferma che lo spazio ha un numero finito e intero di dimensioni, *ovvero* , in termini metrici, che la posizione di un punto, rispetto a qualsiasi altra figura nello spazio, è determinata univocamente da un numero finito di grandezze spaziali, chiamate coordinate.

Il terzo assioma della geometria metrica può essere chiamato, per distinguerlo dal corrispondente assioma proiettivo, assioma della distanza. Esso afferma che esiste una relazione tra due punti qualsiasi, che può essere preservata inalterata in un moto combinato di entrambi i punti e che, in qualsiasi moto di un sistema come un corpo rigido, rimane sempre inalterata. Questa relazione la chiamiamo distanza.

La suddetta enunciazione dei tre assiomi essenziali della geometria metrica è tratta dal pensiero di Helmholtz, modificato da Lie. L'enunciazione degli assiomi di Lie, citata sopra, è stata eccessivamente influenzata dai metodi proiettivi per fornire una resa storicamente corretta dello spirito del secondo periodo; l'enunciazione di Helmholtz, d'altra parte, richiede, come ha dimostrato Lie, modifiche considerevoli. Il compromesso di cui sopra può quindi, spero, essere interpretato come un'accettazione delle correzioni di Lie pur mantenendo lo spirito di Helmholtz.

48. Ma la geometria metrica, sebbene storicamente precedente, è logicamente successiva alla geometria proiettiva. Infatti, la geometria proiettiva si occupa direttamente di quella somiglianza qualitativa che il giudizio del confronto quantitativo richiede come base. Ora, i tre assiomi della geometria metrica sopra menzionati, come vedremo nel CapitoloIII,Sezione B, non presuppongono la misurazione, ma sono, al contrario, le condizioni presupposte dalla misurazione. Senza questi assiomi, che sono comuni a tutti e tre gli spazi, la misurazione sarebbe impossibile; con essi, come sosterrò, la misurazione è in grado, sebbene solo empiricamente, di decidere approssimativamente quale dei tre spazi sia valido per il nostro mondo reale. Ma se questi tre assiomi stessi esprimono non risultati, bensì condizioni di misurazione, non devono essere equivalenti all'enunciazione di quella somiglianza qualitativa su cui si basa il confronto quantitativo? E se così fosse, non dovremmo forse aspettarci di trovare gli stessi assiomi, sebbene forse in una forma diversa, nella geometria proiettiva?

49. Questa aspettativa non sarà delusa. I treassiomi di cui sopra, come vedremo in seguito, sono tutti filosoficamente equivalenti all'omogeneità dello spazio, e questa a sua volta è equivalente agli assiomi della geometria proiettiva. Gli assiomi della geometria proiettiva, infatti, possono essere approssimativamente formulati come segue:

I. Lo spazio è continuo e infinitamente divisibile; lo zero dell'estensione , risultante dalla divisione infinita, è chiamato Punto. Tutti i punti sono qualitativamente simili e si distinguono per il semplice fatto di trovarsi all'esterno l'uno dell'altro.

II. Due punti qualsiasi determinano una figura unica, la retta; due rette, come due punti, sono qualitativamente simili e si distinguono per il semplice fatto di essere reciprocamente esterne.

III. Tre punti non giacenti su una linea retta determinano una figura unica, il piano, e quattro punti non giacenti su un piano determinano una figura tridimensionale. Questo processo può, per quanto si possa vedere *a priori* , essere continuato, senza in alcun modo pregiudicare la possibilità della geometria proiettiva, fino a cinque o a *n* punti. Ma la geometria proiettiva richiede, come assioma, che il processo si arresti con un numero intero positivo di punti, dopodiché ogni nuovo punto è contenuto nella figura determinata da quelli già dati. Se il processo si arresta con (*n* + 1) punti, si dice che il nostro spazio ha *n* dimensioni.

Questi tre assiomi, come si vedrà, sono gli equivalenti dei tre assiomi della geometria metrica [65] , espressi senza riferimento alla quantità. Scopriremo che sono deducibili, come prima, dall'omogeneità dello spazio, o, più in generale, dalla possibilità di sperimentare l'esteriorità. Essi appariranno quindi come *a priori* , come essenziali all'esistenza di qualsiasi geometria e all'esperienza di un mondo esterno in quanto tale.

50. Che in questi assiomi sia implicita una qualche necessità logica, si potrebbe, a mio avviso, dedurre come probabile, già solo dal loro sviluppo storico.

In generale, i sistemi della Metageometria non sono stati concepiti come più adatti a descrivere i fatti rispetto al sistema di Euclide; con l'eccezione di Zöllner, ad esempio, non conosco nessuno che abbia considerato la quarta dimensione necessaria per spiegare i fenomeni. Per quanto riguarda la costante spaziale, sebbene una *piccola* costante spaziale sia considerata empiricamente possibile, di solito non è considerata probabile; e le costanti spaziali finite, con cui la Metageometria ha ugualmente familiarità, di solito non sono nemmeno considerate possibili come spiegazioni di fatti empirici [66] . Pertanto, il motivo non è stato, in ogni caso, di natura fattuale, bensì logica. Questo non dà forse una forte presunzione che quegli assiomi che vengono mantenuti, lo siano perché logicamente indispensabili? Se così fosse, gli assiomi comuni a Euclide e alla Metageometria sarebbero *a priori* , mentre quelli peculiari di Euclide sarebbero empirici. Dopo una critica di alcune diverse teorie della geometria, procederò, nei capitoli III e IV, alla dimostrazione e alle conseguenze di questa tesi, che costituiranno la parte restante del presente lavoro.

NOTE A PIÈ DI PAGINA:

[5] V. Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'lnstitut de France, T. XII. 1833, per un'esposizione completa dei suoi risultati, con riferimenti a scritti precedenti.

[6] Questo metodo più audace, a quanto pare, era stato suggerito, quasi un secolo prima, da un italiano, Saccheri . La sua opera, che sembra essere rimasta completamente sconosciuta fino a quando Beltrami non la riscoprì nel 1889, è intitolata "Euclides ab omni naevo vindicatus, etc." Mediolani, 1733. (Vedi Veronese, Grundzüge der Geometrie, traduzione tedesca, Lipsia, 1894, p. 636.) I suoi risultati includevano lo spazio sferico così come quello iperbolico; ma lo allarmarono a tal punto che dedicò l'ultima metà del suo libro a confutarli.

[7] La prima descrizione della geometria ellittica di Klein, come risultato della teoria proiettiva della distanza di Cayley, apparve in due articoli intitolati "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, I, II", Math. Annalen 4, 6 (1871–2). Fu poi scoperta indipendentemente da Newcomb, in un articolo intitolato "Elementary Theorems relating to the geometry of a space of three dimensions, and of uniform positive curvature in the fourth dimension", Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 83 (1877). Per una descrizione delle controversie matematiche riguardanti la geometria ellittica, si veda Klein "Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie", Göttingen 1893, I. p. 284 ss. Una bibliografia della letteratura pertinente fino all'anno 1878 è stata fornita da Halsted nell'American Journal of Mathematics, voll. 1, 2.

[8] Veronese (op. cit. p. 638) nega la priorità di Gauss nell'invenzione di un sistema non euclideo, sebbene ammetta che sia stato il primo a considerare l'assioma delle parallele indimostrabile. Le sue motivazioni per la prima affermazione sembrano appena sufficienti: sulle prove contrarie, vedi Klein, Nicht-Euklid, I. pp. 171–174.

[9] V. Briefwechsel mit Schumacher, Bd. II. P. 268.

[10] f. Helmholtz, Wiss. Abh. II. P. 611.

[11] Diario di Crelle, 1837.

[12] Theorie der Parallellinien, Berlino, 1840. Ristampato, Berlino, 1887. Tradotto da Halsted, Austin, Texas, USA 4a edizione, 1892.

[13] Frischauf, Absolute Geometrie, nach Johann Bolyai, Lipsia, 1872. Halsted, The Science Absolute of Space, tradotto dal latino, 4a edizione, Austin, Texas, USA 1896.

[14] Sia Lobatchewsky che Bolyai, come osserva Veronese, partono piuttosto dalla coppia di punti che dalla distanza. Vedi Frischauf, Absolute Geometrie, Anhang.

[15] Confronta Stallo, Concetti di fisica moderna, p. 248.

[16] Gesammelte Werke, pp. 255–268.

[17] Sulla storia di questa parola, si veda Stallo, Concetti di fisica moderna, p. 258. Fu usata da Kant e adattata da Herbart a un significato quasi identico a quello che ha in Riemann. Herbart, tuttavia, usa anche la parola *Reihenform* per esprimere un'idea simile. Si veda Psychologie als Wissenschaft, I. § 100 e II. § 139, dove viene suggerita anche l'analogia di Riemann con i colori.

[18] Confronta "Grössenbegriff vom Raum" di Erdmann.

[19] Cfr. Veronese, op. cit. P. 642: "Riemann ist in seiner Definition des Begriffs Grösse dunkel." Vedi anche tutta la critica successiva del Veronese.

[20] Vorträge und Reden, vol. II. P. 18.

[21] Cfr. Klein, Nicht-Euklid, I. p. 160.

[22] Poiché stiamo considerando la curvatura in un punto, ci interessano solo i primi elementi infinitesimi delle geodetiche che partono da tale punto.

[23] Disquisitiones generales circa superficies curvas, Werke, Bd. IV. SS. 219–258, 1827.

[24] Tuttavia, le geometrie di diverse superfici di uguale curvatura sono soggette a differenze importanti. Ad esempio, il cilindro è una superficie a curvatura zero, ma poiché le sue linee di curvatura in una direzione sono finite, la sua geometria coincide con quella del piano solo per lunghezze inferiori alla circonferenza del suo cerchio generatore (cfr. Veronese, op. cit. p. 644). Due geodetiche su un cilindro possono incontrarsi in molti punti. Per le superfici a curvatura zero su cui ciò non è possibile, si può ammettere l'identità con il piano. Altrimenti, l'identità si estende solo alle proprietà di figure che non superano una certa dimensione.

[25] Possiamo infatti considerare due parti diverse della stessa superficie come parti corrispondenti di superfici diverse; la proposizione precedente mostra quindi che una figura può essere riprodotta in una parte quando è stata disegnata in un'altra, se le misure di curvatura corrispondono nelle due parti.

[26] Crelle, Vol. XIX , XX , 1839–40.

[27] In questa formula, *u* e *v* possono essere le lunghezze delle linee, o gli angoli tra le linee, tracciate sulla superficie, e quindi non avere alcun riferimento necessario a una terza dimensione.

[28] In ciò che segue, ho riportato piuttosto l'esposizione di Klein di Riemann, piuttosto che il resoconto di Riemann stesso. La prima è molto più chiara e completa, e non sostanzialmente diversa in alcun modo. V. Klein, Nicht-Euklid, I. pp. 206 ss.

[29] Vedere §§ 69–73.

Grundlagen der Geometrie, I. e II. , Leipziger Berichte, 1890; v. fine del presente capitolo, §

[31] Nicht-Euklid, I. pp. 258–9.

[32] Giornale di Matematiche, vol. VI. , 1868. Tradotto in francese da J. Hoüel negli *"Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure",* vol. VI. 1869.

[33] Rivista di Crelle, voll. XIX. XX. , 1839–40.

[34] Nicht-Euklid, I. p. 190.

[35] Questo articolo è più trigonometrico e analitico del libro tedesco, e quindi rende particolarmente evidente l'interpretazione di cui sopra.

[36] Tali superfici non sono affatto particolarmente remote. Una di esse, ad esempio, è formata dalla rivoluzione del comune Tractrix

$$x = un \text{ peccato } \phi \text{ , } y = un \qquad (\log \tan + \cos \phi) .^{\frac{\varphi}{2}}$$

[37] "Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante", Annali di Matematica, II. vol. 2, 1868–9. Tradotto anche da J. Hoüel, *loc. cit.*

[38] Vedi Klein, Nicht-Euklid, I. p. 47 ss., e i riferimenti ivi riportati.

[39] Vedi la citazione qui sotto, tratta dal suo discorso alla British Association.

[40] Confronta la frase iniziale, dovuta a Cayley, di Higher Plane Curves di Salmon.

[41] V. Nicht-Euklid, I. capp. I. e II.

[42] Vedi p. 9 del discorso di Cayley all'Assemblea Britannica del 1883. Anche una citazione di Klein in Axiome der Geometrie di Erdmann, p. 124 nota.

[43] Natura, Vol. XLV. p. 407.

[44] Nicht-Euklid, I. p. 200.

[45] Cioè l'equazione $AB + BC = AC$, per tre punti su una linea retta.

[46] La formula sostituita da Klein all'inverso del seno o del coseno di Cayley. Le due sono equivalenti, ma quella di Klein è matematicamente molto più conveniente.

[47] Elementi di geometria proiettiva, seconda edizione, Oxford, 1893, cap. IX.

[48] Cap. III. Sezione B.

[49] Cfr. Nicht-Euklid, I. p. 338 ss.

[50] Cfr. la sua Geometrie der Lage, § 8, Harmonische Gebilde.

[51] Il rapporto anarmonico di quattro numeri, p , q , r , s , è definito come

$(p - q).(r - s) / (p - r).(q - s)$.

[52] *Cioè* trasformabili l'uno nell'altro mediante una collineazione. Vedi Cap . III. Sez . A, § 110.

[53] Vedere Cap . III. Sez. A.

[54] Ne consegue che la riduzione delle proprietà metriche a quelle proiettive, anche quando, come nella geometria iperbolica, l'Assoluto è reale, è solo apparente e ha una validità meramente tecnica.

[55] Sir R. Ball non considera il suo contenuto non euclideo come uno spazio possibile (*v. op. cit.* p. 151). Su questo punto importante non concordo con la sua interpretazione, sostenendo che tale contenuto sia uno spazio possibile, *a priori* , come quello di Euclide, e forse effettivamente vero entro i limiti dovuti a errori di osservazione.

[56] Cfr. Nicht-Euklid, I. p. 97 ss. e pag. 292 ss.

[57] Newcomb afferma (*loc. cit.* p. 293): "Il sistema qui esposto si fonda sui seguenti tre postulati.

"1. Presumo che lo spazio sia triplamente esteso, illimitato, privo di proprietà dipendenti dalla posizione o dalla direzione, e che possieda una tale planarità nelle sue parti più piccole che sia i postulati della geometria euclidea, sia le nostre comuni concezioni delle relazioni tra le parti dello spazio siano veri per ogni regione infinitamente piccola dello spazio.

"2. Presumo che questo spazio sia affetto da una curvatura tale che una retta ritorni sempre in sé stessa alla fine di una distanza finita e reale 2D *senza* perdere, in nessuna parte del suo percorso, quella simmetria rispetto allo spazio su tutti i lati che costituisce la proprietà fondamentale della nostra concezione di esso.

"3. Presumo che se due rette partono dallo stesso punto, formando tra loro un angolo infinitamente piccolo *a* , la loro distanza l'una dall'altra alla distanza *r* dal punto di intersezione sarà data dall'equazione

$$2\,aD\,r\pi\,s = \sin\ .\ \pi \qquad 2\,D$$

La retta ha dunque in comune con la retta euclidea la proprietà che due rette di questo tipo si intersecano in un solo punto. È possibile che il numero di punti in cui due rette di questo tipo si intersecano possa essere determinato dalle leggi della curvatura, ma non essendo in grado di determinarlo in tal modo, assumo come postulato la proprietà fondamentale della retta euclidea.

È evidente che, in assenza della determinazione di cui si è parlato, la possibilità di uno spazio ellittico non è dimostrata. Si potrebbe, ad esempio, dimostrare che, in uno spazio in cui esiste un massimo di distanza, devono esistere infinite rette che uniscono due punti di massima distanza. In tal caso, lo spazio ellittico risulterebbe impossibile.

[58] Per una chiarificazione di questo termine, vedere Klein, Nicht-Euklid, I. p. 99 ss.

[59] Cfr. p. 9 del Rapporto: "La mia opinione è che il dodicesimo assioma di Euclide, nella forma di Playfair, non necessiti di dimostrazione, ma faccia parte della nostra nozione di spazio, dello spazio fisico della nostra esperienza, che è la rappresentazione che sta alla base di ogni esperienza esterna."

[60] L'eccezione a questo assioma, nello spazio sferico, presuppone la geometria metrica e non distrugge la validità dell'assioma per la geometria proiettiva. Vedi Cap . III, Sez . B, § 171.

[61] I matematici della scuola di Lie hanno l'abitudine, inizialmente un po' confusionaria, di parlare di moti dello spazio invece che di moti dei corpi, come se lo spazio nel suo insieme potesse muoversi. Tutto ciò che si intende è, ovviamente, il moto equivalente degli assi coordinati, *cioè* un cambiamento di assi nel senso elementare usuale.

[62] "Ueber die Grundlagen der Geometrie", Leipziger Berichte, 1890. Il problema di questi due articoli è in realtà metrico, poiché non riguarda le collineazioni in generale, ma i moti. Il problema, tuttavia, viene trattato con il metodo proiettivo, considerando i moti come collineazioni che lasciano l'Assoluto invariato. Sembrava quindi impossibile discutere il lavoro di Lie, finché non fosse stata fornita una qualche spiegazione del metodo proiettivo.

[63] Le premesse di Lie, per essere precisi, sono le seguenti: Sia

$x_1 = f(x, y, z, a_1, a_2 \ldots)$

$x_2 = \phi(x, y, z, a_1, a_2 \ldots)\ x_3 = \psi(x, y, z, a_1, a_2 \ldots)$

Forniamo una famiglia infinita di trasformazioni reali dello spazio, riguardo alle quali formuliamo le seguenti ipotesi:

A. Le funzioni f, ϕ, ψ, sono funzioni *analitiche di* $x, y, z, a_1, a_2 \ldots$.

B. Due punti $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ possiedono un invariante, *cioè*

$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \Omega(x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2')$

dove $x_1' \ldots, x_2' \ldots$, sono le coordinate trasformate dei due punti.

C.
Mobilità libera: *cioè* , qualsiasi punto può essere spostato in qualsiasi altra posizione; quando un punto è posizioni ; quando due punti sono fissi,

qualsiasi altra posizione generica può assumere ∞^1 posizioni; quando sono tre, non è possibile alcun movimento: queste limitazioni sono il risultato delle equazioni fornite dall'invariante Ω.

[64] Sul punto cfr. Klein, Höhere Geometrie, Gottinga, 1893, II. pp. 225–244, in particolare pp. 230–1.

[65] L'assioma II della triade metrica corrisponde all'assioma III del proiettivo, e *viceversa* .

[66] Cfr. Helmholtz, Wiss. Abh. vol. II. P. 640, nota: "Die Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie (haben) deren Objective Wahrheit nie behauptet."

CAPITOLO II.

Analisi critica di alcune precedenti teorie filosofiche sulla geometria.

51. Abbiamo ora ripercorso lo sviluppo matematico della teoria degli assiomi geometrici, dalla prima rivolta contro Euclide fino ai giorni nostri. Possiamo quindi sperare di avere a nostra disposizione le conoscenze tecniche necessarie per la filosofia della materia. L'importanza della geometria nelle teorie della conoscenza sorte in passato non può essere esagerata. In Cartesio, troviamo l'intera teoria del metodo dominata dalla geometria analitica, della cui fecondità egli era giustamente orgoglioso. In Spinoza, l'influenza preminente della geometria è troppo evidente per richiedere commenti. Tra i matematici, la credenza di Newton nello spazio assoluto è stata a lungo suprema, ed è tuttora responsabile dell'attuale formulazione delle leggi del moto. Contro questa credenza da un lato, e contro la teoria dello spazio di Leibniz dall'altro, e non, come ha sottolineato Caird[67], contro l'empirismo di Hume, si è diretta quella pietra angolare della filosofia critica, la dottrina kantiana dello spazio. Pertanto, la geometria ha sempre rivestito un'importanza fondamentale nella teoria della conoscenza.

Ma in una critica delle principali teorie moderne della geometria, che si propone di essere non una storia della materia, bensì un'introduzione e una difesa delle tesi dell'autore, non sarà necessario discutere di teorie più antiche di quella di Kant. Le idee di Kant su questo argomento, vere o false che siano, hanno dominato il pensiero successivo a tal punto che, sia che siano state accettate o rifiutate, sono sembrate ugualmente influenti nel plasmare le opinioni e il modo di esporre di quasi tutti gli autori successivi.

Kant.

52. In questo capitolo non è mio intento aggiungere nulla alla vasta letteratura della critica kantiana, ma solo discutere l'influenza della Metageometria sull'argomento dell'Estetica Trascendentale e l'aspetto sotto il quale questo argomento deve essere consideratoin unadiscussione sullaGeometria[68]. Su questo punto mi sembra che diversi fraintendimenti abbiano avuto ampia diffusione, sia tra amici che tra nemici, e cercherò, se possibile, di chiarirli.

Innanzitutto, cosa significa la dottrina di Kant per la geometria? Ovviamente non l'aspetto della dottrina attaccato dagli psicologi, la "macchina kantiana" come la chiama James, se questo può essere chiaramente distinto dall'aspetto logico. La questione se lo spazio sia dato dalla sensazione, o se, come sosteneva Kant, sia dato da un'intuizione a cui non corrisponde alcuna materia esterna, può per ora essere tralasciata. Se, in effetti, condividessimo la posizione che sembra riassumere grossolanamente il punto di vista della Critica, ovvero che ogni conoscenza certa è conoscenza di sé, allora saremmo vincolati, se avessimo deciso che la geometria è apodittica, alla tesi che lo spazio sia soggettivo. Ma anche in tal caso, la questione psicologica potrebbe sorgere solo dopo aver risolto la questione epistemologica, e

non potrebbe, quindi, essere presa in considerazione nella nostra prima indagine. La questione che ci troviamo ad affrontare è precisamente se, e in che misura, la geometria sia apodittica, e per il momento dobbiamo solo indagare su questo quesito, senza timore di conseguenze psicologiche.

53. Ora, su questa questione, come su quasi tutte le questioni nell'Estetica o nell'Analitica, l'argomentazione di Kant è duplice. Da un lato, egli afferma che la geometria è nota per avere una certezza apodittica: quindi lo spazio deve essere*a priori*e soggettivo. Dall'altro lato, ne consegue, da presupposti indipendenti dalla geometria, che lo spazio è soggettivo e *a priori* ; quindi la geometria deve avere una certezza apodittica. Questi due argomenti non sono chiaramente distinti nell'Estetica, ma credo che una piccola analisi li chiarirà. Così, nella prima edizione, i primi due argomenti deducono, da presupposti non geometrici, l'apriorità dello spazio; il terzo deduce la certezza apodittica della geometria e sostiene, viceversa, che nessun'altra visione può spiegare questacertezza [69] ; gli ultimi due argomenti sostengono soltanto che lo spazio è un'intuizione, non un concetto. Nella seconda edizione, il duplice argomento è più chiaro: l'apriorità dello spazio viene dimostrata indipendentemente dalla geometria nella deduzione metafisica, e dedotta dalla certezza della geometria, come unica spiegazione possibile di ciò, nella deduzione trascendentale. Nei Prolegomeni viene utilizzato solo quest'ultimo argomento, mentre nella Critica vengono impiegati entrambi.

54. Ora, credo si debba ammettere che la Metageometria ha distrutto la legittimità dell'argomento dalla Geometria allo spazio; non possiamo più affermare, su basi puramente geometriche, la certezza apodittica di Euclide. Ma a meno che la Metageometria non abbia fatto di più – a meno che non abbia dimostrato, cosa che credo essa sola non possa dimostrare, che Euclide*non*certezza apodittica – allora l'altra linea argomentativa di Kant conserva la forza che potrebbe aver mai avuto. Lo spazio reale che conosciamo, si potrebbe dire, è indubbiamente euclideo, ed è dimostrato, senza alcun riferimento alla Geometria, essere*a priori*;*quindi*Euclide ha certezza apodittica, e il non-euclide è condannato. A questo non è una risposta sostenere, con i Metageometri, che i sistemi non euclidei sono*logicamente*coerenti; Kant infatti si preoccupa di argomentare che il ragionamento geometrico, in virtù della nostra intuizione dello spazio, è sintetico e non può, sebbene*a priori*, essere sostenuto dalsolo principio di non contraddizione [70] . A meno che i non euclidei non riescano a dimostrare, cosa che certamente non sono riusciti a dimostrare fino ad ora, che possiamo formulare*un'intuizione* degli spazi non euclidei, la posizione di Kant non può essere ribaltata dalla sola Metageometria, ma deve essere attaccata, se si vuole che sia attaccata con successo, anche sul suo lato puramente filosofico.

55. Per un attacco di questo tipo, si aprono due strade: o possiamo confutare i primi due argomenti dell'Estetica, oppure possiamo criticare, dal punto di vista della logica generale, la dottrina kantiana dei giudizi sintetici*a priori*e il loro legame con la soggettività. Credo che entrambi questi attacchi potrebbero essere condotti con un certo successo; ma se vogliamo confutare la certezza apodittica della Geometria, uno o l'altro è essenziale, ed entrambi, credo, si riveleranno solo parzialmente efficaci. Il mio obiettivo sarà quello di dimostrare, nel

discutere queste due linee di attacco, (1) che la distinzione tra giudizi sintetici e analitici è insostenibile, e inoltre, che il principio di contraddizione può dare risultati fruttuosi solo se si assume che l'esperienza in generale, o, in una particolare scienza, qualche ramo speciale dell'esperienza, sia formalmente possibile; (2) che i primi due argomenti dell'Estetica trascendentale siano sufficienti a dimostrare, non lo spazio euclideo, ma*una qualche*forma di esteriorità – che può essere sensoriale o intuitiva, ma non meramente concettuale – un prerequisito necessario per l'esperienza di un mondo esterno. Nel terzo e quarto capitolo, sosterrò, come conseguenza di queste conclusioni, che quegli assiomi che Euclide e la Metageometria hanno in comune coincidono con quelle proprietà di qualsiasi forma di esteriorità che sono deducibili, per il principio di contraddizione, dalla possibilità di esperienza di un mondo esterno. Queste proprietà, quindi, possono essere considerate, sebbene non del tutto nel senso kantiano,*a priori*dello spazio, e riguardo a queste, penso, si possa sostenere una posizione kantiana modificata. Ma la questione della natura soggettiva o oggettiva dello spazio può essere completamente tralasciata nel corso di questa discussione, che trarrà vantaggio dal trattare esclusivamente punti di vista logici, in contrapposizione a quelli psicologici.

56. (1)*La posizione logica di Kant.*La dottrina dei giudizi sintetici e analitici, almeno se questa viene presa come pietra angolare dell'epistemologia.

—è stata così completamente rigettata dalla maggior parte dei logici moderni [71] , che meriterebbe poca attenzione qui, se non fosse per il fatto che un entusiasta kantiano francese, il signor Renouvier, vi si è recentemente appellato, con perfetta fiducia, proprio sulla questione della geometria [72] . E bisogna ammettere, con il signor Renouvier, che se tali giudizi esistessero, nel senso kantiano, la geometria non euclidea, che non fa appello all'intuizione, non potrebbe dire nulla contro di essi. La tesi del signor Renouvier, quindi, ci costringe a riesaminare brevemente gli argomenti contro la dottrina di Kant e a discutere brevemente quale canone logico la sostituirà.

Ogni giudizio – così sostiene la logica moderna – è al contempo sintetico e analitico; combina le parti in un tutto e analizza un tutto in parti [73] . Se così fosse, la distinzione tra analisi e sintesi, qualunque sia la sua importanza nella logica pura, non avrebbe alcun valore nell'epistemologia. Ma una tale dottrina, va osservato, concede piena applicazione al principio di contraddizione: questo criterio, poiché tutti i giudizi, almeno sotto un aspetto, sono analitici, è applicabile a tutti i giudizi allo stesso modo. D'altra parte, il tutto che viene analizzato deve essere supposto già dato, prima che le parti possano essere reciprocamente contraddittorie: infatti solo per connessione in un dato tutto due parti o aggettivi possono essere incompatibili. Pertanto, il principio di contraddizione rimane sterile finché non abbiamo già alcuni giudizi, e persino alcune inferenze: poiché le parti possono essere considerate, in una certa misura, come un'inferenza dal tutto, o *viceversa* . Una volta eretto l'arco della conoscenza, le sue parti si sostengono a vicenda e il principio di contraddizione diventa la chiave di volta: ma finché l'arco non è costruito, la chiave di volta rimane sospesa, instabile e priva di sostegno, nel vuoto. In altre parole, la conoscenza, una volta esistente, può

essere analizzata, ma la conoscenza che deve superare ogni ostacolo contro uno scetticismo critico, non potrebbe mai iniziare e non potrebbe mai raggiungere quella condizione circolare in cui sola può reggersi.

Ma la dottrina di Kant, se vera, è concepita per frenare lo scetticismo critico anche laddove potrebbe essere efficace. Alcune proposizioni fondamentali, afferma, non sono deducibili dalla logica, *ovvero* le loro contraddizioni non sono autocontraddittorie; esse combinano un soggetto e un predicato che non possono, in alcun modo puramente logico, dimostrare di avere una connessione, eppure questi giudizi possiedono una certezza apodittica. Tuttavia, riguardo a tali giudizi, Kant è generalmente attento a non basarsi sulla mera convinzione soggettiva della loro innegabilità: dimostra, con ogni precauzione, che senza di essi l'esperienza sarebbe impossibile. L'esperienza consiste nella combinazione di termini che la logica formale lascia separati e presuppone, pertanto, certi giudizi mediante i quali si crea una struttura per unire tali termini. Senza questi giudizi – così sostiene Kant – ogni sintesi e ogni esperienza sarebbero impossibili. Se, dunque, il dettaglio del ragionamento kantiano è corretto, i suoi risultati possono essere ottenuti mediante il principio di non contraddizione *unito* alla possibilità dell'esperienza, nonché mediante la sua distinzione tra giudizi sintetici e analitici.

La logica, oggigiorno, si arroga al contempo una sfera più ampia e più ristretta di quella che Kant le consentiva. Più ampia, perché si ritiene capace di condannare qualsiasi principio o postulato falso; più ristretta, perché crede che la sua legge di non contraddizione, in assenza di un dato insieme o di una data ipotesi, sia impotente, e che due termini, *di per sé* , pur essendo diversi, non possano essere contraddittori, ma acquisiscano tale relazione solo combinandosi in un tutto di cui si ha conoscenza, o per connessione con un postulato che, per qualche ragione, deve essere conservato. Pertanto, nessun giudizio, *di per sé* , è né analitico né sintetico, poiché la separazione di un giudizio dal suo contesto lo priva della sua vitalità e lo rende non più un vero giudizio. Ma nel suo contesto proprio non è né puramente sintetico né puramente analitico; perché, pur essendo l'ulteriore determinazione di un dato insieme, e quindi in tal senso analitico, implica anche l'emergere di *nuove* relazioni all'interno di questo insieme, e quindi in tal senso sintetico.

57. Possiamo tuttavia conservare una distinzione che corrisponda approssimativamente alla distinzione kantiana*tra à priori*e *à posteriori* , sebbene meno rigida e più soggetta a cambiamenti in base al grado di organizzazione della conoscenza. Kant, come osservato in precedenza, si sforzava solitamente di dimostrare che le sue proposizioni sintetiche*à priori*fossero prerequisiti necessari dell'esperienza; ora, sebbene non possiamo conservare il termine sintetico, possiamo conservare il termine*à priori*, per quelle assunzioni, o postulati, dai quali soltanto deriva la possibilità dell'esperienza. Tutto ciò che può essere dedotto da questi postulati, senza l'ausilio della materia dell'esperienza, sarà ovviamente anche*à priori*. Dal punto di vista della logica generale, solo le leggi del pensiero e le categorie, con le condizioni indispensabili della loro applicabilità, saranno *à priori* ; ma dal punto di vista di qualsiasi scienza specifica, possiamo definire *à priori* tutto ciò che rende possibile

l'esperienza che costituisce l'oggetto della nostra scienza. In geometria, per essere precisi, possiamo definire *a priori* tutto ciò che rende possibile l'esperienza dell'esteriorità in quanto tale.

Va osservato che questo uso del termine è al contempo più razionalistico e meno preciso di quello di Kant. Kant sembrerebbe essersi reso conto immediatamente, per ispezione, che una certa conoscenza fosse apodittica, e il suo oggetto, quindi, *à priori* ; ma non sempre ne deduceva l'apriorità da un principio ulteriore. Qui, invece, prima di ammettere l'apriorità, bisogna dimostrare che la falsità del giudizio in questione non sarebbe determinata da un semplice cambiamento nella *materia dell'esperienza, ma solo da un cambiamento che rendesse formalmente impossibile, ovvero* inaccessibile ai nostri metodi di conoscenza , qualche ramo dell'esperienza . L'uso sopra descritto è anche meno preciso, poiché varia a seconda della specializzazione dell'esperienza che si presume possibile, e con ogni progresso della conoscenza si percepisce una nuova connessione, due giudizi precedentemente isolati vengono messi in relazione logica, e l' *à priori* può quindi, in qualsiasi momento, ampliare la sua sfera, man mano che si trova di più deducibile dai postulati fondamentali.

58. (2) *Gli argomenti di Kant per l'apriorità dello spazio.* Avendo ora discusso il canone logico da usare per quanto riguarda l' *à priori* , possiamo procedere a verificare gli argomenti di Kant riguardo allo spazio. L'argomento della geometria, come osservato sopra, è ribaltato dalla metageometria, almeno per quanto riguarda quelle proprietà che appartengono agli spazi euclidei ma non a quelli non euclidei; per quanto riguarda le proprietà comuni a entrambi i tipi di spazio, non possiamo decidere sulla loro apriorità finché non avremo discusso le conseguenze della loro negazione, cosa che faremo nel CapitoloIII. Per quanto riguarda i due argomenti che dimostrano che lo spazio è un'intuizione, non un concetto, essi richiederebbero molta discussionein unacritica specifica di Kant, ma qui possono essere tralasciati con l'ovvio commento che lo spazio euclideo omogeneo infinito è un concetto, non un'intuizione: un concetto inventato per spiegare un'intuizione, è vero, ma pur sempre unconcetto puro [74] . Ed è questo concetto puro che, in tutte le discussioni sulla geometria, deve essere trattato principalmente; all'intuizione si deve fare riferimento solo quando essa getta luce sulle funzioni o sulla natura del concetto. Il secondo argomento di Kant, secondo cui possiamo immaginare lo spazio vuoto, sebbene non l'assenza di spazio, è falso se significa uno spazio senza materia in alcun luogo, ed irrilevante se significa semplicemente uno spazio tra le materie e consideratovuoto [75] . L'unico argomento importante, quindi, è il primo. Ma devo insistere, fin da subito, sul fatto che il nostro problema è puramente logico e che tutte le implicazioni psicologiche devono essere escluse nella misura massima possibile. Inoltre, come verrà dimostrato nel CapitoloIV, la funzione propria dello spazio è quella di distinguere tra cose diverse presentate, non tra il Sé e l'oggetto della sensazione o della percezione. L'argomento diventa quindi il seguente: la coscienza di un mondo di cose reciprocamente esterne richiede, nelle presentazioni, un elemento cognitivo ma non inferenziale che conduca alla discriminazione degli oggetti presentati. Questo elemento deve essere non inferenziale, poiché da qualsiasi numero o combinazione di presentazioni, che di

per sé non richiedevano diversità nei loro oggetti, non potrei mai essere portato a dedurre la reciproca esteriorità dei loro oggetti. Kant dice: «Affinché le sensazioni possano essere attribuite a qualcosa di esterno a me... e analogamente affinché io possa presentarle come esterne e accanto l'una all'altra,... la presentazione dello spazio deve essere già presente». Ma questo va un po' troppo oltre: in primo luogo, la questione dovrebbe riguardare solo la reciproca esteriorità delle cose presentate, non la loro esteriorità alSé[76].In secondo luogo, le cose appariranno reciprocamente esterne se avrò la presentazione di *una qualsiasi* forma di esternalità, sia essa euclidea o non euclidea. Qualunque cosa sia vera riguardo alla portata *psicologica* di questo argomento – la cui validità è qui irrilevante – la portata *logica* si estende non allo spazio euclideo, ma solo a qualsiasi forma di esternalità che possa esistere intuitivamente e permettere la conoscenza, in esseri dotati delle nostre leggi del pensiero, di un mondo di cose diverse ma interrelate.

Inoltre, l'esternalità, per rendere del tutto logica la portata dell'argomentazione, non deve essere lasciata con un significato sensoriale o intuitivo, sebbene si debba supporre che sia data nella sensazione o nell'intuizione. Essa deve significare, in questa argomentazione, il fatto dell'Alterità [77] , il fatto di essere diverso da qualcos'altro: deve implicare la distinzione tra cose diverse e deve essere quell'elemento, in uno stato cognitivo, che ci porta a discriminare le parti costituenti nel suo oggetto. Sembrerebbe dunque che dall'argomentazione di Kant derivi che l'esperienza di cose diverse ma interrelate richieda, come prerequisito necessario, un elemento sensoriale o intuitivo, nella percezione, mediante il quale siamo portati ad attribuire complessità agli oggetti della percezione [78] ; che questo elemento, nel suo isolamento, possa essere chiamato una forma di esternalità; e che quelle proprietà di questa forma, se ve ne sono, che possono essere dedotte dalla sua mera funzione di rendere possibile l'esperienza della diversità interrelata, debbano essere considerate a *priori* . Nei capitoli III e IV vedremo quali siano queste proprietà e come le varie linee argomentative qui proposte convergano verso un unico risultato.

59. Nei filosofi che seguirono Kant, la metafisica, per la maggior parte, prevalse sull'epistemologia, tanto che poco fu aggiunto alla teoria della geometria. Quel che fu aggiunto, venne indirettamente dall'unico filosofo che si distinse contro le speculazioni puramente ontologiche del suo tempo, vale a dire*Herbart*. Le attuali concezioni di Herbart sulla geometria, che si trovano principalmente nella prima sezione della sua*Synechologie*, non sono di grande valore e non hanno portato grandi frutti nello sviluppo della materia. Ma la sua teoria psicologica dello spazio, la sua costruzione dell'estensione a partire da serie di punti, il suo paragone dello spazio con le serie tonali e cromatiche, la sua preferenza generale per il discreto rispetto al continuo e, infine, la sua convinzione della grande importanza di classificare lo spazio con altre forme di serie (*Reihenformen* [79]), diedero origine a molte delle speculazioni epocali di Riemann e incoraggiarono il tentativo di spiegare la natura dello spaziosolo attraverso il suo aspetto analitico e quantitativo [80] . Grazie alla sua influenza su Riemann, acquisì, indirettamente, una grande importanza nella filosofia geometrica. Alla dissertazione di Riemann, che abbiamo già trattato nel suo aspetto matematico, dobbiamo ora tornare,

considerando, questa volta, solo le sue concezioni filosofiche.

Riemann.

60. Lo scopo della dissertazione di Riemann, come abbiamo visto nel CapitoloI, era quello di definire lo spazio come una specie di varietà,*ovvero* come un particolare tipo di collezione di grandezze. Si presupponeva quindi, in primo luogo, che le figure spaziali potessero essere considerate grandezze, e gli assiomi che ne derivarono, di conseguenza, determinavano solo la particolare collocazione di queste tra le molte varietà di grandezze algebricamente possibili. La formulazione risultante degli assiomi – sebbene, dal punto di vista matematico della geometria metrica, fosse quasi del tutto lodevole – deve, dal punto di vista filosofico, essere considerata, a mio parere, una*petitio principii*. Infatti, quando siamo giunti a considerare le figure spaziali come grandezze, abbiamo già attraversato la parte più difficile del terreno. Gli assiomi della geometria metrica – ed è esclusivamente la geometria metrica che viene considerata nel Saggio di Riemann – appariranno nel CapitoloIII., da suddividere in due classi. Di queste, la prima classe – che contiene gli assiomi comuni a Euclide e alla Metageometria, gli unici assiomi seriamente discussi da Riemann – non sono il risultato di una misurazione, né di alcuna concezione di grandezza, ma sono condizioni da soddisfare affinché la misurazione diventi possibile. Solo la seconda classe – quella che esprime la differenza tra spazi euclidei e non euclidei – può essere dedotta come risultato di una misurazione o di concezioni di grandezza. Per quanto riguarda la prima classe, al contrario, vedremo che la relatività della posizione – per cui lo spazio si distingue da tutte le altre varietà conosciute, eccetto il tempo – conduce logicamente alla necessità di tre degli assiomi più caratteristici della geometria, eppure questa relatività non può essere considerata una deduzione da concezioni di grandezza. Nella geometria analitica, poiché i sistemi di coordinate partono da punti e quindi costruiscono linee e superfici, è facile supporre che i punti possano essere dati indipendentemente dalle linee e l'uno dall'altro, perdendo così di vista la relatività della posizione. L'errore così suggerito dalla matematica fu probabilmente rafforzato dalla teoria dello spazio di Herbart, che, per il suo carattere seriale, come abbiamo visto, gli sembrava facilitare una costruzione a partire da punti successivi, e alla quale Riemann riconosce il suo debito sia nella sua dissertazione che altrove. Lo stesso errore riappare in Helmholtz, nel quale è probabilmente dovuto interamente ai metodi della geometria analitica. È sorprendente che, in tutti gli scritti di questi due uomini, non vi sia, per quanto ne so, un solo accenno alla relatività della posizione, quella proprietà dello spazio dalla quale, come mostrerà il nostro prossimo capitolo, si può estrarre la più ricca miniera di conseguenze. Ciò non è il risultato di una concezione di grandezza, ma deriva dalla natura della nostra intuizione spaziale; Eppure nessuno, certamente, potrebbe definirla empirica, poiché è intrinsecamente legata alla possibilità stessa di collocare le cose *lì* anziché *qui* .

61. Infatti, da una considerazione puramente logica del giudizio di quantità, possiamo constatare che il modo in cui Riemann affronta il problema non può mai, con metodi legittimi, giungere a una formulazione filosoficamente valida degli assiomi. La quantità, infatti, è il

risultato del confronto tra due oggetti qualitativamente simili, e il giudizio di quantità trascura completamente l'aspetto qualitativo degli oggetti confrontati. Pertanto, la conoscenza delle proprietà essenziali dello spazio non può mai essere ottenuta da giudizi di quantità che trascurano tali proprietà, pur presupponendole. Sarebbe altrettanto sensato sperare di apprendere la natura umana da un censimento. Inoltre, il giudizio di quantità è il risultato del confronto e, quindi, presuppone la possibilità del confronto. Per sapere se, o con quali mezzi, il confronto è possibile, dobbiamo conoscere le qualità delle cose confrontate e del mezzo in cui il confronto viene effettuato; mentre per sapere che*quantitativo*è possibile, dobbiamo sapere che esiste un'identità qualitativa tra le cose confrontate, il che a sua volta implica una precedente conoscenza qualitativa. Quando le figure spaziali vengono ridotte a quantità, la loro qualità viene automaticamente trascurata, in quanto nota e simile alla qualità di altre figure. Sperare, pertanto, di ricavare le qualità dello spazio dal confronto della sua espressione come pura quantità con altre quantità pure, è un errore tipico del geometra analitico, ma pur sempre un errore dal quale non si può tornare alla base qualitativa della quantità spaziale.

62. Dobbiamo dunque dissentire completamente dalla disgiunzione che sottende la filosofia dello spazio di Riemann. Egli ritiene che gli assiomi debbano essere o conseguenze di concezioni generali di grandezza, oppure possano essere dimostrati solo attraverso l'esperienza (p. 255).Possiamo ribattere che*può a priori*dello spazio: poiché tutti gli aggettivi necessari dello spazio sono presupposti in qualsiasi giudizio di quantità spaziale e non possono, quindi, essere conseguenze di tale giudizio. La disgiunzione di Riemann, di conseguenza, poiché una delle sue alternative è ovviamente impossibile, in realtà petiziona la questione. Nel formulare gli assiomi della geometria metrica, la nostra domanda dovrebbe essere: quali assiomi,*cioè*quali aggettivi dello spazio, devono essere presupposti affinché sia possibile un confronto quantitativo delle parti dello spazio? Solo dopo aver determinato queste condizioni, che sono *a priori* necessarie a qualsiasi scienza quantitativa dello spazio, si pone la seconda domanda: quali inferenze possiamo trarre, riguardo allo spazio, dai risultati osservati di questa scienza quantitativa,*cioè*di questa misurazione di figure spaziali? Le condizioni di misurazione stesse, pur non essendo il risultato di alcuna concezione di grandezza, saranno*a priori*, se si può dimostrare che, senza di esse, l'esperienza dell'esteriorità sarebbe impossibile.

Dopo questa iniziale contestazione della posizione filosofica generale di Riemann, procediamo ad esaminare nel dettaglio il suo utilizzo della nozione di varietà.

63. In primo luogo, se non erro, vi è una notevole oscurità nella definizione di varietà, di cui è stata fornita una formulazione quasi verbale nel CapitoloI.Cosa si intende, innanzitutto, per concetto generale suscettibile di varie determinazioni? Questa proprietà non appartiene forse a tutti i concetti? Essa fornisce certamente una base per il conteggio, ma se si vuole parlare di quantità continua, dobbiamo necessariamente ricorrere a una formulazione meno discreta. Potrebbe, ad esempio, fornire una base per la distinzione dei punti nella geometria proiettiva, ma la geometria proiettiva non ha nulla a che fare con la quantità. Qualcosa di più fluido e

flessibile di un concetto, si potrebbe pensare, è necessario come base dei continui. E poi, cosa si intende per quanto di varietà? Nello spazio, la risposta è ovvia: si intende un volume. Ma che dire dell'altra varietà continua di Riemann, il colore? Un quanto di colore significa una singola riga dello spettro, o una banda di spessore finito? In entrambi i casi, quali sono le grandezze da confrontare? E come mai la sovrapposizione è necessaria, o addirittura possibile? Un colore è definito dalla sua posizione nello spettro: due righe nello stesso spettro non possono essere sovrapposte, e due righe in spettri diversi non necessariamente lo sono: bastano le loro posizioni nei rispettivi spettri, o anche, approssimativamente, la loro immediata qualità sensoriale. Il fatto è che Riemann aveva lo spazio in mente fin dall'inizio, e molte delle proprietà che enuncia come appartenenti a tutte le varietà appartengono, di fatto, solo allo spazio. Non è affatto chiaro quali siano le grandezze che le varie determinazioni rendono possibili. Queste grandezze misurano gli elementi della varietà, o le relazioni tra gli elementi? Questo è certamente un punto fondamentale, ma è un punto che Riemann non affronta mai. Nel primo caso, la sovrapposizione di cui parla diventa superflua, poiché la grandezza è inerente all'elemento considerato. Non abbiamo bisogno della sovrapposizione per misurare quantità corrispondenti a diverse tonalità o colori; queste possono essere scoperte mediante l'analisi di singole tonalità o colori. D'altra parte, se cerchiamo elementi nello spazio, non ne troviamo altro che punti, e nessuna analisi di un punto troverà grandezze in esso inerenti: tali grandezze sono una finzione della geometria analitica. Le grandezze di cui si occupa lo spazio, come vedremo nel CapitoloIII,sono relazioni tra punti, ed è per questo motivo che la sovrapposizione è essenziale per la misurazione dello spazio. Non c'è alcuna qualità intrinsecain un singolo punto, come c'èin unsingolo colore, per cui esso possa essere quantitativamente distinto da un altro. Pertanto, la concezione di varietà, come definita da Riemann, o non include i colori, o non implica la sovrapposizione come unico mezzo di misurazione. Da questo dilemma non c'è via d'uscita.

64. Ma se «la misurazione*consiste*in una sovrapposizione delle grandezze confrontate» (p. 256), non ne consegue forse immediatamente che la misurazione è logicamente possibile*solo*laddove tale sovrapposizione lascia le grandezze inalterate? E quindi che la misurazione, come definita sopra, implica, come*a priori*, che le grandezze siano inalterate dal movimento? Questa conseguenza non viene tratta da Riemann; anzi, egli procede immediatamente (pp. 256-257) a considerare quella che chiama una parte generale della dottrina della grandezza (*Grössenlehre*), indipendente dalla misurazione. Ma come è possibile una dottrina della grandezza in cui le grandezze non possono essere misurate? La ragione della confusione sta nel fatto che la definizione di misurazione di Riemann non è applicabile anessuna varietà tranne lo spazio, poiché dipende dalla notevole proprietà che ciò che misuriamo in geometria non sono punti, ma relazioni tra punti, e queste ultime, sebbene non i primi, possono ovviamente rimanere inalterate dal movimento. Proviamo, a titolo di esempio, ad applicare la definizione di misura di Riemann ai colori. Dobbiamo ricordare che il movimento, quando si ha a che fare con la varietà cromatica, non significa movimento nello spazio, bensì movimento nella varietà cromatica stessa. Ora, poiché ogni punto della varietà cromatica è completamente determinato da tre grandezze, che sono date

di fatto e non possono essere scelte arbitrariamente, è evidente che la misura per sovrapposizione – che implica, come fa, movimento e quindi variazione di queste grandezze determinanti – è assolutamente fuori discussione. La sovrapposizione di un colore su un altro, come mezzo di misura, è pura assurdità. Eppure la misura è possibile nella varietà cromatica, per mezzo della legge di miscelazione di Helmholtz.

(*Mischungsgesetz*); ma la misurazione è di ogni singolo elemento, non delle relazioni tra gli elementi, ed è quindi radicalmente diversa dalla misurazione dello spazio [81] . Gli elementi non sono, come i punti nello spazio, qualitativamente simili e distinti dal semplice fatto della loro reciproca esternalità. Ciò che abbiamo, nei colori, sono tre elementi fondamentali qualitativamente distinti, da certe proporzioni dei quali possiamo costruire tutti gli altri elementi della varietà: ciascuno degli elementi risultanti ha la stessa combinazione di diversità e somiglianza qualitativa dei tre elementi originali. Ma nello spazio, cosa potremmo fare di una tale procedura? Dati tre punti, come dobbiamo combinarli in certe proporzioni? La frase è priva di significato. Se qualcuno fa l'ovvia replica, che dobbiamo combinare linee, non punti, la mia risposta è altrettanto ovvia. Per cominciare, le linee non sono elementi. Metafisicamente, lo spazio *non* ha elementi, essendo, come mostrerà il seguito, semplici relazioni tra elementi non spaziali. Matematicamente, questo fatto si manifesta nella nozione autocontraddittoria del punto, o grandezza zero nello spazio, come limite nella nostra vana ricerca di elementi spaziali. Ma anche se permettiamo che la linea venga considerata l'elemento spaziale, cosa ci dà la combinazione di tre linee in proporzioni definite? Ci dà, semplicemente, le coordinate di un *punto* . Anche qui vediamo una grande differenza tra le varietà cromatiche e spaziali. Nei colori, la combinazione di grandezze dà una nuova grandezza dello stesso tipo; nello spazio, definisce non una grandezza, ma un potenziale elemento di tipo diverso rispetto alle grandezze che la definiscono. Nella varietà tonale, dovremmo trovare condizioni ancora diverse. Qui, nessuna delle grandezze di misura può svanire senza che svanisca anche il tono, e tutte e tre sono così legate insieme, nell'unica sensazione risultante, che nessuna può esistere senza una quantità finita delle altre. Sono tutte qualitativamente diverse, sia tra loro, sia da qualsiasi possibile tono, essendone costituenti, come la massa e la velocità sono costituenti della quantità di moto. Tutte queste diverse condizioni devono essere esaminate prima che una varietà possa essere completamente definita; e finché non avremo condotto tale esame in dettaglio, non possiamo pronunciarci sulla natura *a priori* o empirica delle leggi della varietà. Per quanto riguarda lo spazio, ho tentato tale esame nel terzo e quarto capitolo di questo saggio.

65. Non intendo negare, tuttavia, il grande valore della concezione dello spazio come varietà. Al contrario, questa concezione sembra essere diventata essenziale per qualsiasi trattazione della questione. Voglio solo sottolineare che il trattamento puramente algebrico di una qualsiasi varietà, per quanto importante possa essere nel dedurre nuove conseguenze da premesse note, tende piuttosto a nascondere che a chiarire il fondamento delle premesse stesse, ed è quindi fuorvianteinun'indagine filosofica. Per la matematica, dove la quantità regna sovrana, la concezione di Riemann si è dimostrata estremamente feconda; per la filosofia, al contrario, dove la quantità appare piuttosto come un mantello per nascondere le

qualità da cui astrae, tale concezione mi sembra più propensa a generare errori e confusione che una sana dottrina.

Siamo quindi ricondotti al punto di partenza, ovvero la falsità della disgiunzione iniziale di Riemann e la conseguente fallacia nella sua dimostrazione della natura empirica degli assiomi. La sua filosofia è principalmente viziata, a mio avviso, da questa fallacia e dall'assunto acritico che un sistema di coordinate metriche possa essere stabilito indipendentemente da qualsiasi assioma sulla misurazione dello spazio [82] . Riemann non ha osservato, ciò che ho cercato di dimostrare nel capitolo successivo, che, a meno che lo spazio non avesse una misura di curvatura strettamente costante, la geometria diventerebbe impossibile; inoltre, l'assenza di una misura di curvatura costante implica la posizione assoluta, il che è un'assurdità. Pertanto, giunge alla conclusione che tutti gli assiomi geometrici sono empirici e potrebbero non valere nell'infinitesimale, dove l'osservazione è impossibile. Così egli afferma (p. 267): "Ora le concezioni empiriche, su cui si basano le misurazioni spaziali, le concezioni del corpo rigido e del raggio di luce, sembrano perdere la loro validità nell'infinitesimale: è quindi del tutto concepibile che le relazioni delle grandezze spaziali nell'infinitesimale non corrispondano ai presupposti della geometria, e questo, di fatto, dovrebbe essere assunto, non appena ci permettesse di spiegare i fenomeni più semplicemente". Da questa conclusione devo dissentire completamente. In spazi molto grandi, potrebbe esserci una deviazione da Euclide; poiché dipendono dall'assioma delle parallele, che non è contenuto nell'assioma della libera mobilità; ma nell'infinitesimale, le deviazioni da Euclide potrebbero essere dovute solo all'assenza di libera mobilità, che, come spero mostrerà il mio terzo capitolo, è una volta per tutte

impossibile.

Helmholtz.

66. Helmholtz, come Riemann, fu importante sia nella matematica che nella filosofia della geometria. Dal punto di vista matematico, il suo lavoro è già stato considerato nel capitoloI; la considerazione della sua filosofia, che ci impegnerà qui, sarà un compito più serio. Come Riemann, si sforzò di dimostrare che tutti gli assiomi sono empirici e, come Riemann, basò la sua dimostrazione principalmente sulla metageometria. Aveva però una risorsa aggiuntiva nella fisiologia dei sensi, che lo portò dapprima a rifiutare l'estetica trascendentale e gli permise di attaccare Kant sia dalpunto di vista psicologico che matematico [83] .

I temi principali, per una critica a Helmholtz, sono tre: in primo luogo, il suo criterio dell'à *priori* ; in secondo luogo, la sua discussione con Land sull'"immaginabilità" degli spazi non euclidei; in terzo luogo – e questo è di gran lunga il più importante dei tre – la sua teoria della dipendenza della geometria dalla meccanica. Analizziamo questi tre punti uno per uno.

67. Il criterio di priorità di Helmholtz è difficile da scoprire, poiché, a mia conoscenza, non ne fornisce mai una formulazione precisa. Dalla sua discussione sullageometria fisica e trascendentale [84]

, tuttavia, sembrerebbe che egli consideri empirico tutto ciò che si applica alla materia empirica. Infatti, egli sostiene che, anche se lo spazio fosse una*a priori*, qualsiasi geometria che mirasse ad un'applicazione alla fisica, poiché le posizioni effettive dei corpi non sono note*a priori*, sarebbe necessariamenteempirica [85] . Sembra tanto più probabile che egli consideri questo un criterio possibile, poiché viene adottato, in diversi passaggi, dal suo discepoloErdmann [86] , e un test così strano difficilmente potrebbe essere accettato da un filosofo, a meno che non lo avesse trovato nel suo maestro. Ho definito questo untest stranoperché mi sembra che ignori completamente l'opera della filosofia critica. Se c'è una cosa che, si sarebbe potuto sperare, fosse stata sufficientemente chiarita dalla Critica di Kant, è questa: la conoscenza *a priori*, essendo essa stessa la condizione dell'esperienza possibile, si applica – e, secondo Kant, si applica soltanto – alla materia empirica. Helmholtz ed Erdmann, pertanto, nell'elaborare questo criterio senza discuterne, ignorano semplicemente l'esistenza di Kant e la possibilità di un argomento trascendentale.

Helmholtz presuppone sempre che la conoscenza empirica debba essere interamente empirica, che non possano esistere condizioni *a priori* dell'esperienza in questione, che l'esperienza sia sempre possibile e possa dare qualsiasi tipo di risultato. Pertanto, nel discutere la geometria "fisica", egli presuppone che la possibilità di misurazione empirica non implichi assiomi *a priori* e che nessun elemento *a priori* possa essere contenuto nel processo. Questa ipotesi, come vedremo nel Capitolo III , è del tutto ingiustificabile: certe proprietà dello *spazio* , infatti, sono implicate nella possibilità di misurare *la materia* . Nonostante il fatto che applichiamo la misurazione alla materia empirica e che i nostri risultati siano quindi empirici, potrebbe benissimo esserci un elemento *a priori* nella misurazione, che è presupposto nella sua possibilità. Un tale criterio, quindi, dovrebbe dichiarare tutto empirico, ma dovrebbe essere esso stesso dichiarato privo di valore.

Un altro criterio, migliore a dire il vero, si trova anche in Helmholtz ed è stato adottato anche da Erdmann. Tutto ciò che, attraverso un'esperienza diversa, avrebbe potuto essere reso diverso – così sostiene questo criterio – deve essere a sua volta dipendente dall'esperienza, e quindi empirico. Questo criterio sembra perfettamente valido, ma l'uso che ne fa Helmholtz è solitamente viziato dal fatto che egli trascura di dimostrare la possibilità dell'esperienza diversa in questione. Afferma, ad esempio, che se la nostra esperienza ci mostrasse solo corpi che cambiano forma in movimento, non giungeremmo all'assioma di congruenza, che egli dichiara quindi empirico. Ma io cercherò di dimostrare, nel Capitolo III, che senza l'assioma di congruenza, l'esperienza della grandezza spaziale sarebbe impossibile. Se la mia dimostrazione è corretta, ne consegue che nessuna esperienza può mai rivelare grandezze spaziali che contraddicano questo assioma – una possibilità che Helmholtz non discute in alcun punto, quando presenta la sua esperienza ipotetica. Pertanto, questo secondo criterio, sebbene perfettamente valido, richiede sempre un argomento trascendentale che lo accompagni, riguardo alle condizioni di una possibile esperienza. Ma questo accompagnamento si trova raramente in Helmholtz.

68. Uno dei pochi casi in cui Helmholtz ha tentato un simile accompagnamento si verifica in relazione al nostro secondo punto, l'immaginabilità degli spazi non euclidei. L'argomentazione su questo punto fu sollevata dagli oppositori kantiani di Helmholtz, i quali sostenevano che la mera possibilità logica di questi spazi fosse irrilevante, poiché la base della geometria non era la logica, ma l'intuizione. Gli assiomi, dicevano, sono proposizioni sintetiche e i loro contrari non sono, quindi, autocontraddittori; sono tuttavia proposizioni apodittiche, poichénoi*intuizione*se non quella euclidea[87] . Ho già criticato questa linea di argomentazione all'inizio del presente capitolo. La critica di Helmholtz, tuttavia, era diversa: pur ammettendo la coerenza interna dell'argomentazione, ne negava una delle premesse. Possiamo*immaginare* spazi non euclidei, diceva, anche se la loro estraneità rende ciò difficile. Da questa prospettiva ne conseguiva, naturalmente, che l'argomentazione di Kant, anche se formalmente valida, non poteva dimostrare l'apriorità dello spazio euclideo in particolare, ma solo di quello spazio generale che includeva sia Euclide che non Euclide [88] .

Anche se sono d'accordo con Helmholtz nel ritenere empirica la distinzione tra spazi euclidei e non euclidei, non posso ritenere molto felice la sua argomentazione sulla "immaginabilità" di questi ultimi. La validità di qualsiasi prova deve dipendere, ovviamente, dalla definizione di immaginabilità. La definizione che Helmholtz dà nella sua risposta a Land è la seguente: L'immaginabilità richiede "die vollständige Vorstellbarkeit derjenigen Sinneseindrücke, welche das betreffende Object in uns nach den bekannten Gesetzen unserer Sinnesorgane unter allen denkbaren Bedingungen der Beobachtung erregen, und wodurch es sich von anderen ähnlichen Objecten unterscheiden würde" (Wiss. Abh. II. p. 644). Questa definizione non è molto chiara a causa dell'ambiguità della parola " *Vorstellbarkeit* ". La seguente definizione sembra meno ambigua: "Wenn die Reihe der Sinneseindrücke vollständig und eindeutig angegeben werden kann, muss man m. E. die Sache für *anschaulich vorstellbar* erklären" (Vorträge und Reden, II. p. 234). Ciò chiarisce, come appare anche dal suo modo di dimostrare, che egli considera immaginabili le cose che possono essere *descritte* in termini concettuali. Tale, come osserva Land (Mind, Vol. II. p. 45), "non è il senso richiesto per l'argomentazione in questo caso". Che la critica di Land sia giusta è dimostrato dalla dimostrazione di Helmholtz per gli spazi non euclidei, poiché consiste solo in un'analogia con il volume all'interno di una sfera, che si ottiene matematicamente in questo modo: prendiamo i simboli che rappresentano le grandezze nello spazio "pseudo-sferico" (iperbolico) e diamo loro un nuovo significato euclideo; Pertanto, tutte le nostre proposizioni simboliche diventano suscettibili di due interpretazioni, una per lo spazio pseudo-sferico e una per il volume all'interno di una sfera. È tuttavia sufficientemente ovvio che questa procedura, sebbene ci permetta di *descrivere* il nostro nuovo spazio, non ci permette di *immaginarlo* , nel senso di evocare immagini di come le cose apparirebbero in esso. In realtà, da questa analogia non ricaviamo più conoscenza di quanta ne possa ricavare un uomo nato cieco, riguardo alla luce, da un'analogia con il calore. Il detto "Nihil est in intellectu quod non fuerit ante in sensu" sarebbe indubbiamente vero se a *intelletto* sostituissimo *immaginazione* ; è vano, quindi, *se* il nostro spazio reale è euclideo, sperare in una capacità di *immaginazione* Uno spazio non euclideo. Ciò che Helmholtz avrebbe potuto, credo con assoluta verità, obiettare a Land, è

che l'immagine che effettivamente abbiamo dello spazio non è sufficientemente accurata da escludere, nello spazio reale che conosciamo, ogni possibilità di una leggera deviazione dal tipo euclideo. Ma nel sostenere che non possiamo immaginare, sebbene possiamo concepire e descrivere, uno spazio diverso da quello che effettivamente abbiamo, Land ha, a mio parere, indubbiamente ragione. Per un kantiano puro, che sostiene, con Land, che nessuno degli assiomi può essere dimostrato, questa questione è di grande importanza. Ma se, come ho sostenuto, alcuni degli assiomi sono suscettibili di una dimostrazione trascendentale, mentre gli altri possono essere verificati empiricamente, la questione si libera dalle implicazioni psicologiche e l'immaginabilità o la non immaginabilità degli spazi metageometrici diventa irrilevante.

69. Giungiamo ora alla terza e più importante questione, la relazione tra geometria e meccanica. Ci sono tre accezioni in cui si può interpretare il riferimento di Helmholtz ai corpi rigidi: la prima, a mio avviso, è quella in cui egli intendeva originariamente; la seconda sembra essere quella che adottò nella sua difesa contro Land; mentre la terza è ammessa da Land e sarà ammessa anche nell'argomentazione che segue. Queste tre accezioni sono le seguenti:

(1) Si può affermare che il vero significato dell'assioma di FreeMobility risiede nell'affermazione dei corpi rigidi empirici e che le due proposizioni sono equivalenti tra loro. Ciò è certamente falso.

(2) Si può dire che l'assioma della libera mobilità sia logicamente distinguibile dall'affermazione dei corpi rigidi e che possa anche non essere empirico; ma è sterile, persino per la geometria pura, senza l'ausilio di misure, che devono essere esse stesse corpi rigidi empirici. Questo senso è più plausibile del primo, ma credo che possiamo dimostrare che, anche in questo senso, la proposizione è falsa.

(3) Per la geometria pura e lo studio astratto dello spazio, si può dire che la mobilità libera, applicata a una materia geometrica astratta, offre una possibilità sufficiente di confronto quantitativo; ma nel momento in cui estendiamo i nostri risultati alla matematica mista e li applichiamo a una materia data empiricamente, richiediamo anche, come misure, corpi rigidi dati empiricamente, o corpi, almeno, le cui deviazioni dalla rigidità sono note empiricamente. In questo senso, ammetto, la proposizione è corretta [89] .

Nell'analizzare questi tre significati, non mi limiterò strettamente al testo di Helmholtz o di Land: se cercassi di farlo, mi imbatterei nella difficoltà che nessuno dei due definisce l' *à priori* , e che entrambi sono fin troppo inclini, a mio parere, a verificarlo mediante criteri psicologici. Prenderò quindi in esame i tre significati uno alla volta, senza soffermarmi sulla loro adeguatezza storica alle posizioni di Land o di Helmholtz.

70. (1) La congruenza può essere intesa nel senso – come Helmholtz sembrerebbe certamente desiderare – che troviamo corpi reali, nella nostra esperienza meccanica, che conservano le loro forme con approssimativa costanza, e che da questa esperienza deduciamo l'omogeneità dello spazio. Questa visione, a mio parere, fraintende radicalmente la natura della misurazione e gli assiomi che la riguardano. Che cosa si intende infatti per non

rigidità di un corpo? Intendiamo, semplicemente, che ha cambiato forma. Ma ciò implica la possibilità di confronto con la sua forma precedente, in altre parole, di misurazione. Affinché, quindi, possa esserci una questione di rigidità o non rigidità, la misurazione delle grandezze spaziali deve già essere possibile. Ne consegue che la misurazione non può, senza un circolo vizioso, essere essa stessa derivata dall'esperienza dei corpi rigidi. La misurazione geometrica, infatti, è il confronto delle grandezze spaziali, e tale confronto implica, come verrà dimostrato ampiamente nel CapitoloIII, l'omogeneità dello spazio. Questo è, quindi, il prerequisito logico di ogni esperienza di corpi rigidi e non può esserne il risultato. Senza l'omogeneità dello spazio, la nozione stessa di rigidità o non rigidità non potrebbe esistere, poiché queste significano, rispettivamente, la costanza o l'incostanza della grandezza spaziale in pezzi di materia, ed entrambe, quindi, presuppongono la possibilità di misurazione spaziale. Dall'omogeneità dello spazio apprendiamo che un corpo, quando si muove, non cambierà forma senza una qualche causa fisica; che effettivamente non cambi forma non viene mai affermato, ed è anzi noto per essere falso. Non appena la misurazione è possibile, si possono stimare i cambiamenti di forma effettivi e se ne possono ricercare le cause empiriche. Ma se lo spazio non fosse omogeneo, la misurazione sarebbe impossibile, la forma costante sarebbe un'espressione priva di significato e la rigidità non potrebbe mai essere sperimentata. La congruenza afferma, in breve, che un corpo può, per quanto riguarda il mero spazio, muoversi senza cambiare forma; La rigidità afferma che effettivamente si muove in quel modo: una proposizione molto diversa, che implica ovviamente, come suo presupposto logico, la precedente proposizione geometrica.

Questo argomento può essere riassunto dalla seguente disgiunzione: se i corpi cambiano forma durante il movimento – e in una certa misura, poiché nessun corpo è perfettamente rigido, tutti devono farlo – allora deve verificarsi uno dei due casi. *O* i cambiamenti di forma, mentre i corpi si spostano da un luogo all'altro, non seguono alcuna legge geometrica, non sono, ad esempio, funzioni della quantità o della direzione del movimento; nel qual caso la legge di causalità richiede che non siano effetti del cambiamento di luogo, ma di qualche cambiamento non geometrico simultaneo, come la temperatura. *Oppure* i cambiamenti sono regolari e la forma *S* diventa, in una nuova posizione p , $Sf(p)$. In questo caso, la legge delle variazioni concomitanti ci porta ad attribuire il cambiamento di forma al mero movimento, e la forma diventa quindi una funzione della posizione assoluta. Ma questo è assurdo, perché la posizione *significa* semplicemente una relazione o un insieme di relazioni; è impossibile, quindi, che la mera posizione possa produrre cambiamenti in un corpo. La posizione è un termine in una relazione, non una cosa *in sé* ; Non può, quindi, agire su una cosa, né esistere di per sé, a prescindere dagli altri termini della relazione. Pertanto, la tesi di Helmholtz, secondo cui la congruenza dipende dall'esistenza di corpi rigidi, deve, poiché implica la posizione assoluta, essere condannata come fallacia logica. La congruenza, infatti, come dimostrerò più ampiamente nel Capitolo III, è una deduzione *a priori* dalla relatività della posizione.

71. (2) L'argomentazione di cui sopra mi sembra rispondere in modo soddisfacente alla tesi di Helmholtz nella forma precisa in cui l'ha presentata per la prima volta. L'assioma di

congruenza, dobbiamo ammettere, è logicamente distinguibile dall'esistenza di corpi rigidi. Tuttavia, nellageometria è logicamente implicato un qualche riferimento alla materia [90] , ma se questo riferimento renda la geometria empirica, o se non mostri piuttosto un*a priori*nella dinamica, è un'ulteriore questione.

Il riferimento alla materia è reso necessario dall'omogeneità dello spazio vuoto. Fintanto che non teniamo conto della materia, una posizione è perfettamente indistinguibile da un'altra, e una scienza delle relazioni tra le posizioni è impossibile. Infatti, prima che possano emergere relazioni spaziali, l'omogeneità dello spazio vuoto deve essere distrutta, e questa distruzione deve essere operata dalla materia. La pagina bianca è inutile per il geometra finché non ne deturpa l'omogeneità con linee a inchiostro o a matita. In breve, nessuna figura spaziale è concepibile senza un riferimento a una materia non puramente spaziale. Inoltre, se si vuole utilizzare la congruenza, deve esserci movimento: ma un punto puramente geometrico, essendo definito unicamente dai suoi attributi spaziali, non può essere supposto in movimento senza una contraddizione in termini. Ciò che si muove, quindi, deve essere materia. Pertanto, affinché il movimento possa fornire un criterio di uguaglianza, dobbiamo avere una qualche *materia* che sia nota per rimanere inalterata durante il movimento, cioè dobbiamo avere dei corpi rigidi. La difficoltà sta nel fatto che questi corpi non solo non devono subire alcun cambiamento dovuto unicamente alla natura dello spazio, ma devono anche rimanere inalterati dal loro rapporto mutevole con altri corpi. E qui abbiamo un requisito che non può più essere soddisfatto *a priori* : un requisito che, in realtà, sappiamo essere, in senso stretto, falso. Infatti, le forze che agiscono su un corpo dipendono dalle sue relazioni spaziali con altri corpi, e le forze variabili tendono a produrre configurazioni variabili. Pertanto, sembrerebbe che la misurazione effettiva debba essere puramente empirica e debba dipendere dal grado di rigidità che si ottiene, durante il processo di misurazione, nei corpi con cui abbiamo familiarità.

Credo che questa conclusione sia valida per tutte le misurazioni effettive. Ma la possibilità di una tale rigidità empirica e approssimativa, devo insistere, dipende dalla legge *a priori secondo cui il semplice* movimento, a prescindere dall'azione di altra materia, non può produrre un cambiamento di forma. Senza questa legge, infatti, l'effetto di altra materia non sarebbe rilevabile; le leggi del moto sarebbero assurde e la fisica sarebbe impossibile. Si consideri, ad esempio, la seconda legge: come potremmo misurare il cambiamento di moto, se il moto stesso producesse un cambiamento nelle nostre misure? O si consideri la legge di gravitazione universale: come potremmo stabilire l'inverso del quadrato, se non fossimo in grado, indipendentemente dalla dinamica, di misurare le distanze? In breve, tutta la scienza della dinamica dipende fondamentalmente dalla geometria, e senza la possibilità indipendente di misurare le grandezze spaziali, nessuna delle grandezze della dinamica potrebbe essere misurata. Tempo, forza e massa sono misurati allo stesso modo da correlati spaziali: questi correlati sono dati, per il tempo, dalla prima legge, per la forza e la massa, dalla seconda e dalla terza. È vero, dunque, che un elemento empirico appare inevitabilmente in ogni misurazione effettiva, in quanto possiamo sapere empiricamente solo che un dato pezzo di materia conserva la sua forma durante il necessario cambiamento delle

relazioni dinamiche con altra materia coinvolta nel movimento; ma è anche vero che, per la Geometria – che considera la materia semplicemente come ciò che fornisce la necessaria interruzione nell'omogeneità dello spazio e il termine necessario per le relazioni spaziali, non come il portatore di forze che cambiano la configurazione di altri sistemi materiali – per la Geometria, che si occupa di questa materia astratta e meramente cinematica, la rigidità è *a priori* , in quanto gli unici cambiamenti di cui è consapevole – cambiamenti di mera posizione, vale a dire – non sono in grado di influenzare le forme dei corpi immaginari e astratti di cui si occupa. Per usare una distinzione scolastica, possiamo dire che la materia è la *causa essendi* dello spazio, ma la Geometria è la *causa cognoscendi* della Fisica. Senza una geometria indipendente dalla fisica, la fisica stessa, che necessariamente presuppone i risultati della geometria, non potrebbe mai nascere; ma quando la geometria viene utilizzata in fisica, perde parte della sua certezza *a priori* e acquisisce il carattere empirico e approssimativo che appartiene a tutte le descrizioni dei fenomeni reali.

72. (3) Questo argomento ci conduce alla distinzione di Land tra rigidità fisica e geometrica. La distinzione può essere espressa – e penso che sia espressa meglio – distinguendo tra le concezioni di materia proprie rispettivamente della Dinamica e della Geometria. Nella Dinamica, ci occupiamo della materia in quanto soggetta al movimento e causa di movimento, in quanto influenzata dalla forza e in quanto esercitatrice*di forza*. Ci occupiamo quindi dei cambiamenti di configurazione spaziale a cui sono soggetti i sistemi materiali: la descrizione e la spiegazione di questi cambiamenti costituiscono l'oggetto proprio di tutta la Dinamica. Ma affinché una tale scienza possa esistere, è ovviamente necessario che la configurazione spaziale sia già misurabile. Se così non fosse, il movimento, l'accelerazione e la forza rimarrebbero perfettamente indeterminati. La geometria, quindi, deve già esistere prima che la Dinamica diventi possibile: rendere la Geometria dipendente, per la sua possibilità, dalle leggi del moto o da una qualsiasi delle loro conseguenze, è un grossoὕστερον πρότερον. Tuttavia, come abbiamo visto, una qualche forma di materia è essenziale per la geometria. Ma questa materia geometrica è una materia più astratta e completamente diversa da quella della dinamica. Per studiare lo spazio in sé, riduciamo le proprietà della materia al minimo indispensabile: evitiamo completamente la categoria della causalità, così essenziale per la dinamica, e non conserviamo nulla, nella nostra materia, se non i suoiaggettivi spaziali [91] . Il tipo di rigidità affermata di questa materia astratta – un tipo che è sufficiente per la teoria della nostra scienza, sebbene non per la sua applicazione agli oggetti della vita quotidiana – è puramente geometrico enonaltro che questo: poiché la nostra materia è priva,*ex hypothesi*, di proprietà causali, non rimane nulla, nel mero spazio vuoto, che sia in grado di cambiare la configurazione di qualsiasi sistema geometrico. Un cambiamento di posizione assoluta, afferma, non è nulla; quindi l'unico vero cambiamento implicato nel movimento è un cambiamento di relazione con altra materia; ma tale altra materia, ai fini della nostra scienza, è considerata priva di poteri causali; Pertanto, non può verificarsi alcun cambiamento nella configurazione del nostro sistema per il semplice effetto del movimento attraverso lo spazio vuoto. La necessità di tale principio può essere dimostrata con una semplice*reductio ad absurdum*, come segue. Un moto di traslazione dell'universo

nel suo insieme, con direzione e velocità costanti, è dinamicamente trascurabile; anzi, filosoficamente non è affatto un movimento, poiché non implica alcun cambiamento nella condizione o nelle relazioni reciproche delle cose nell'universo. Ma se la nostra rigidità geometrica fosse negata, il cambiamento del parametro dello spazio potrebbe far cambiare forma a tutti i corpi a causa del semplice cambiamento di posizione assoluta, il che è ovviamente assurdo.

Per chiarire del tutto la funzione dei corpi rigidi in geometria, supponiamo un geometra liquido in un mondo liquido. Non possiamo supporre che il liquido sia perfettamente omogeneo e indifferenziato, in primo luogo perché un tale liquido sarebbe indistinguibile dallo spazio vuoto, in secondo luogo perché il corpo del nostro geometra – a meno che non sia uno spirito disincarnato – costituirebbe esso stesso una differenziazione per lui. Possiamo quindi supporre

"fasci deboli,

Che tra i ruscelli tessono una rete di luce colorata,"

Possiamo supporre che questa rete costituisca l'occasione per le riflessioni del nostro geometra. Egli potrà quindi immaginare una rete in cui le linee siano rette, circolari, paraboliche o di qualsiasi altra forma, e potrà dedurre che una tale rete, se può essere intessuta in una parte del fluido, può essere intessuta anche in un'altra. Ciò costituirà una base sufficiente per le sue deduzioni. La sovrapposizione di cui si occupa – poiché non l'uguaglianza effettiva, ma solo le condizioni formali di uguaglianza, sono oggetto della geometria – è puramente ideale e non risente dell'impossibilità di realizzare una rete reale. Ma per applicare la sua geometria alle esigenze della vita, avrebbe bisogno di un parametro di confronto tra reti reali, e in questo caso, è vero, avrebbe bisogno o di un corpo rigido, o della conoscenza delle condizioni in cui si formano reti simili. Inoltre, queste condizioni, essendo necessariamente empiriche, difficilmente potrebbero essere conosciute senza misurazioni precedenti. Pertanto, per la geometria applicata, sebbene non per quella pura, almeno un corpo rigido sembra essenziale.

73. L'utilità della nostra materia geometrica astratta per la dinamica è sufficientemente evidente. Avendo, grazie ad essa, il potere di determinare le configurazioni dei sistemi materiali in qualsiasi punto dello spazio, e sapendo che i cambiamenti di configurazione non sono dovuti al semplice spostamento, siamo in grado di attribuire questi cambiamenti all'azione di altra materia, e quindi di stabilire la nozione di forza, cosa che sarebbe impossibile se il cambiamento di forma potesse essere dovuto allo spazio vuoto.

In conclusione: la geometria, per essere *praticamente* possibile, richiede uno o più corpi rigidi (in senso dinamico) o che subiscano determinate trasformazioni di forma secondo una legge ben definita. (Queste trasformazioni, possiamo supporre, sono note grazie alle leggi della fisica, che sono state sperimentalmente accertate e che presuppongono la validità della geometria). Uno o più di questi corpi sono necessari alla geometria applicata, ma solo nello stesso senso in cui sono necessari righelli e compassi. Sono necessari come, nella

realizzazione dell'Ordnance Survey, era necessario un apparato complesso per misurare la linea di base nella piana di Salisbury. Ma per la *teoria* della geometria, è sufficiente la rigidità geometrica, e la rigidità geometrica significa solo che una forma, possibile in una parte dello spazio, è possibile in qualsiasi altra. L'elemento empirico nella pratica, derivante dalla natura puramente empirica della rigidità fisica, è paragonabile alle imprecisioni empiriche derivanti dall'incapacità di trovare linee rette o cerchi nel mondo – imprecisioni che nessuno, tranne Mill, ha considerato tali da rendere la geometria stessa empirica o imprecisa. Ma far sì che la geometria attenda la perfezione della fisica significa rendere la fisica, che dipende interamente dalla geometria, per sempre impossibile. Sarebbe altrettanto opportuno rimandare la formazione dei numeri fino a quando non avessimo contato le case di Piccadilly.

Erdmann.

74. In relazione a Riemann e Helmholtz, è naturale considerare

L'opera filosofica di Erdmann sulle loro teorie [92] . Questo è certamente il libro più importante sull'argomento apparso dal punto di vista filosofico, e nonostante il fatto che, come tutta la teoria di Riemann e Helmholtz, non sia applicabile alla geometria proiettiva, merita comunque una discussione molto approfondita.

Erdmann concorda pienamente con le conclusioni di Riemann e Helmholtz, salvo su alcuni punti di minore importanza; e le sue opinioni, come ci si aspetterebbe da tale concordanza, sono ultra-empiriche. In effetti, la sua logica sembra – sebbene lo dica con esitazione – incompatibile con qualsiasi sistema che non sia quello di Mill: apparentemente, per lui, non esiste distinzione tra il generale e l'universale, e di conseguenza nessun concetto non è incarnato in una serie di casi. Una tale teoria della logica, a mio avviso, inficia gran parte della sua opera, così come inficiò la filosofia di Riemann [93] . Questa critica generale troverà ampia illustrazione nel corso della nostra esposizione delle opinioni di Erdmann.

75. Dopo un'introduzione generale e una breve storia dello sviluppo della Metageometria, Erdmann procede, nel suo secondo capitolo, a discutere quali siano gli assiomi della Geometria Euclidea. Gli assiomi aritmetici, come vengono chiamati, vengono tralasciati in quanto applicabili alla grandezza in generale; ciò che ci serve qui, dice, è una definizione di spazio, per la quale solo gli assiomi geometrici sono rilevanti. Ma una definizione di spazio, afferma – seguendo Riemann – richiede un genere di cui lo spazio sia una specie, e questo, poiché il nostro spazio è psicologicamente unico, può essere fornito solo dalla matematica analitica (p. 36). Ora, le forme spaziali trattate dalla Geometria sono grandezze, e le concezioni di grandezza sono ovunque applicate in Geometria. Ma prima di Riemann, solo particolari determinazioni dello spazio potevano essere presentate come grandezze, e quindi la definizione desiderata era impossibile da ottenere. Ora, tuttavia, possiamo ricondurre lo spazio nel suo insieme a una concezione generale di grandezza, ottenendo così, oltre all'intuizione spaziale e alla concezione spaziale, una terza forma, vale a dire la concezione dello spazio come grandezza (*Grössenbegriff vom Raum*, pp. 38-39). La definizione di questa ci fornirà il sistema completo, ma non ridondante, di assiomi, che non si sarebbe potuto

ottenere trasformando l'intuizione generale dello spazio nella concezione spaziale, per mancanza di una pluralità di casi (p. 40).

76. Prima di considerare il successivo metodo di definizione, riflettiamo sulle teorie implicate nella suddetta descrizione della concezione dello spazio come grandezza. In primo luogo, si assume che le concezioni non possano formarsi se non si dispone di una serie di oggetti distinti da cui astrarre una proprietà comune, in altre parole, che l'universale sia sempre il generale. In secondo luogo, si assume che ogni definizione sia una classificazione sotto un genere. In terzo luogo, la concezione di grandezza, se non erro, è fondamentalmente fraintesa quando si suppone che sia applicabile allo spazio nel suo complesso. Ma in quarto luogo, anche se una tale concezione esistesse, non potrebbe fornire nessuna delle proprietà essenziali dello spazio. Consideriamo questi quattro punti in successione.

77. Per quanto riguarda il primo punto, va osservato che le persone avevano certamente una qualche concezione dello spazio prima che Riemann inventasse la nozione di varietà, e che questa concezione era certamente qualcosa di diverso dalle qualità comuni di tutti i punti, linee o figure nello spazio. In secondo luogo, la visione di Erdmann renderebbe impossibile concepire Dio, a meno che non si sia politeisti, o l'universo – a meno che, come Leibniz, non si immagini una serie di mondi possibili, contrapposti a Dio, e nessuno di essi, quindi, un vero Universo – o, per fare un esempio più propenso ad attrarre un empirista, il centro di massa necessariamente unico dell'universo materiale. Qualsiasi universale, in breve, che sia un legame o un'unità tra le cose, e non semplicemente una proprietà comune tra oggetti indipendenti, diventa impossibile secondo la visione di Erdmann. Non possiamo, quindi, a meno che non si adotti integralmente la filosofia di Mill, considerare la concezione dello spazio come qualcosa che richieda una serie di esempi da cui astrarre. Ma anche se lo considerassimo in questo modo, le varietà di Riemann ci lascerebbero senza risorse. Infatti, lo spazio euclideo appare ancora come unico, alla fine della sua serie di determinazioni. Abbiamo esempi di varietà, ma non esempi di spazio euclideo. Pertanto, se la teoria delle concezioni di Erdmann fosse corretta, egli continuerebbe a cercare invano la concezione dello spazio euclideo.

78. Il secondo punto, la tesi secondo cui ogni definizione è classificazione, è strettamente legato al primo, e i due insieme ci immergono nelle profondità della logica formale scolastica. Gli stessi esempi di cose che, secondo la tesi di Erdmann, non potevano essere concepite, ora possono essere addotti come cose che non possono essere definite. Quanto detto sopra si applica anche qui, e il punto non necessita, pertanto, di ulteriori discussioni[94].

79. Per quanto riguarda il terzo punto, l'impossibilità di applicare i concetti di grandezza allo spazio nel suo insieme, sarà necessario un argomento più lungo, poiché qui ci occupiamo dell'intera questione della natura logica dei giudizi di grandezza. Come prima avevamo troppi paragoni per le nostre esigenze, così ora ne abbiamo troppo pochi. Cercherò di spiegare questo punto, che è di grande importanza e che, a mio avviso, è alla base della maggior parte delle fallacie filosofiche della scuola di Riemann.

Un giudizio di grandezza è sempre un giudizio di confronto, e per di più, il confronto non riguarda mai la qualità, ma solo la quantità. La qualità, nel giudizio di grandezza, si suppone identica, sia nell'oggetto di cui si esprime la grandezza, sia nell'unità con cui viene confrontato. Ma la qualità, eccetto che nel puro numero e nella pura quantità come trattata dal Calcolo, è sempre presente, ed è in parte assorbita nella quantità, in parte non toccata dal giudizio di grandezza. Come afferma Bosanquet (Logica, Vol. I , p. 124): "Il confronto quantitativo non è *a prima vista* coordinato con quello qualitativo, ma piuttosto si pone al suo posto come *effetto del confronto sulla qualità* , la quale, nella misura in cui è comparabile, *diventa quantità* , e nella misura in cui è incomparabile, fornisce la distinzione delle parti essenziali al tutto quantitativo" (corsivo nell'originale). Pertanto, se consideriamo lo spazio come una grandezza, dobbiamo essere in grado di addurre tutte quelle serie di esempi di cui parla Erdmann e che, per la concezione dello spazio, sembravano irrilevanti. Resta però da dimostrare che il confronto che possiamo *stabilire* tra spazi diversi sia suscettibile di espressione quantitativa . Sembrerebbe piuttosto che la differenza di qualità sia tale da precludere un confronto quantitativo tra spazi diversi, e quindi anche da precludere qualsiasi giudizio di grandezza sullo spazio nel suo complesso. Qui potrebbe sembrare che si renda necessaria un'eccezione per gli spazi non euclidei, le cui costanti spaziali conferiscono una grandezza definita, inerente allo spazio nel suo complesso, e che quindi, si potrebbe pensare, caratterizza lo spazio come una grandezza. Ma questo è un errore. Infatti, in tali spazi, la costante spaziale è l'unità ultima, il termine fisso in ogni confronto quantitativo; essa stessa è, quindi, priva di quantità, poiché non esiste una grandezza data indipendentemente con cui confrontarla. Un mondo non euclideo, in cui la costante spaziale e tutte le linee e le figure venissero improvvisamente moltiplicate in un rapporto costante, rimarrebbe del tutto immutato; le linee, misurate rispetto alla costante spaziale, avrebbero la stessa grandezza di prima, e la costante spaziale stessa, non avendo alcun parametro di confronto esterno, sarebbe priva di quantità e quindi non soggetta a variazioni di quantità. Un simile ampliamento di un mondo non euclideo, in altre parole, è privo di significato; e ciò dimostra quanto sia inapplicabile la nozione di quantità allo spazio nel suo complesso.

Si potrebbe obiettare che ciò dimostra solo l'assenza di differenza quantitativa tra spazi diversi a costante spaziale positiva, o tra quelli a costante spaziale negativa: la differenza quantitativa persiste, si potrebbe dire, tra quelli a curvatura positiva in generale e quelli a curvatura negativa in generale, o tra entrambi insieme e lo spazio euclideo. Questo lo nego categoricamente. Non esiste un'unità qualitativamente simile, nei tre tipi di spazio, mediante la quale si possa effettuare un confronto quantitativo. Le rette di uno spazio non possono essere inserite nell'altro: le due rette, in uno spazio, il cui prodotto è il reciproco della misura di curvatura, non hanno curve corrispondenti nell'altro spazio, e le misure di curvatura non possono, quindi, essere confrontate quantitativamente tra loro. Che una possa essere considerata positiva, l'altra negativa, lo ammetto, ma i loro valori sono indeterminati e le unità nei due casi sono qualitativamente diverse. Un debito di 300 sterline può essere rappresentato come un'attività di 300 sterline, e l'altezza della Torre Eiffel è di +300 metri; Ma ciò non implica che le due siano quantitativamente comparabili. Lo stesso vale per le costanti

spaziali: la costante spaziale è essa stessa l'unità di misura delle grandezze nel proprio spazio e differisce qualitativamente dalla costante spaziale di un altro tipo di spazio.

Di nuovo, per passare a un argomento più filosofico, due spazi diversi non possono coesistere nello stesso mondo: potremmo non essere in grado di decidere tra le alternative della disgiunzione, ma esse rimangono, nondimeno, alternative assolutamente incompatibili. Quindi non possiamo ottenere quella coesistenza di due spazi che è essenziale per il confronto. Il fatto sembra essere che Erdmann, nella sua ammirazione per Riemann e Helmholtz, sia caduto nella loro inclinazione matematica e abbia assunto, come i matematici tendono naturalmente ad assumere, che la quantità sia ovunque e sempre applicabile e adeguata, e possa occuparsi di più del semplice confronto di cose le cui qualità sono già note come simili [95] .

80. Ciò suggerisce il quarto e ultimo punto di cui sopra, ovvero che le*qualità*dello spazio, anche se lo spazio potesse essere considerato con successo come una grandezza, dovrebbero essere completamente omesse in un tale modo di considerarlo, e che, pertanto, nessuna delle sue proprietà importanti o essenziali emergerebbe da tale trattamento. Infatti, considerare lo spazio come una grandezza implica, come abbiamo visto, un confronto con qualcosa di qualitativamente simile e un'astrazione dalle qualità simili. In una certa misura e con l'aiuto di certi argomenti discutibili, tale confronto viene istituito da Riemann ed Erdmann; ma una volta istituito, dimenticano completamente le qualità comuni da cui dipende la sua possibilità. Eppure queste sono precisamente le proprietà fondamentali dello spazio, e quelle da cui, come cercherò di dimostrare nel CapitoloIII, *seguono a priori* gli assiomi comuni a Euclide e alla Metageometria. Tali sono i pericoli del pregiudizio quantitativo.

81. Dopo questa protesta contro le ipotesi iniziali della deduzione dello spazio di Erdmann, torniamo a considerare il modo in cui tale deduzione viene condotta. Qui ci saranno meno motivi di critica, poiché la deduzione, dati i suoi presupposti, è, a mio avviso, valida quanto una deduzione di questo tipo può essere. Per definire lo spazio come grandezza, egli afferma, partiamo da due delle sue proprietà più ovvie: la continuità e le tre dimensioni. I toni e i colori offrono altri esempi di varietà con queste due proprietà, ma differiscono dallo spazio in quanto le loro dimensioni non sono omogenee e interscambiabili. Per designare questa differenza, Erdmann introduce una coppia di termini utili: nel caso generale, chiama una varietà*n*-determinata (n-*bestimmt*); nel caso in cui, come nello spazio, le dimensioni siano omogenee, chiama la varietà*n*-estesa (n-*ausgedehnt*). Le varietà di quest'ultimo tipo le chiama estensioni (*Ausgedehntheiten*). Sembra non rendersi conto che la differenza tra i due tipi è di qualità, non di quantità; inoltre, trascura il fatto che, nel secondo tipo, per definizione stessa, deve valere l'assioma di congruenza, in virtù della somiglianza qualitativa delle diverse parti. Nonostante ciò, definisce lo spazio come un'estensione e considera la congruenza empirica e potenzialmente falsa nell'infinitesimale. Questo è tanto più strano in quanto dimostra (p. 50) che la misurazione è impossibile, in un certo senso, a meno che le parti non siano indipendenti dal loro luogo e possano essere trasportate inalterate come

misure. Ciononostante, procede immediatamente a discutere se la misura della curvatura sia costante o variabile, senza indagare su come, in quest'ultimo caso, la geometria potrebbe esistere. Non possiamo sapere, afferma, dalla sovrapposizione geometrica, che i corpi geometrici siano indipendenti dal luogo, perché se le loro dimensioni si modificassero nel movimento secondo una qualsiasi legge fissa, due corpi che potrebbero essere sovrapposti in un luogo potrebbero essere sovrapposti in qualsiasi altro. Che una simile ipotesi implichi una posizione assoluta e neghi la somiglianza qualitativa delle parti dello spazio, che egli dichiara (p. 171) essere il principio della sua teoria della geometria, non viene percepito in alcun modo. Ma, quel che è più grave, la sua nozione che la grandezza sia qualcosa di assoluto, indipendente dal confronto, gli ha impedito di vedere che tale ipotesi è priva di senso. Egli stesso afferma che, anche in base a questa ipotesi, un corpo geometrico può essere definito come un corpo i cui punti mantengono distanze costanti l'uno dall'altro, poiché, non avendo una misura assoluta, la misurazione non potrebbe rivelarci il cambiamento della grandezza assoluta (p. 60). Ma non è forse questa una*reductio ad absurdum*?? La grandezza non è nulla al di fuori del confronto, e il confronto qui può essere effettuato solo mediante sovrapposizione; se, dunque, come nell'ipotesi di cui sopra, la sovrapposizione dà sempre lo stesso risultato, qualunque sia il movimento con cui viene effettuata, non ha senso parlare di grandezze come non più uguali quando separate: la grandezza assoluta è un'assurdità, e la grandezza risultante dal confronto non differisce da quella che risulterebbe se le dimensioni dei corpi fossero invariate nel movimento. Pertanto, poiché la grandezza è intelligibile solo come risultato del confronto, le dimensioni dei corpi *sono* invariate nel movimento, e l'ipotesi suggerita è priva di significato. Su questo argomento avrò altro da dire nel Capitolo III. [96]

82. Questa ipotesi, tuttavia, non viene introdotta fine a se stessa, ma solo per introdurre il*deus ex machina*, la Meccanica. Infatti la Meccanica dimostra – come Erdmann continua con sicurezza – che la rigidità deve valere non solo per quanto riguarda i rapporti, nel suddetto senso geometrico ristretto, ma anche per quanto riguarda le grandezze assolute (p. 62). Da ciò otteniamo infine la vera Congruenza, empirica come la Meccanica è empirica, e impossibile da dimostrare senza la Meccanica. Ho già criticato la visione di Helmholtz sulla dipendenza della Geometria dalla Meccanica, e non è necessario che qui ne parli a lungo. È un peccato che Erdmann non abbia in alcun modo specificato la procedura con cui la Meccanica decide le alternative geometriche – anzi, sembra che si affidi all'ipse*dixit*di Helmholtz. Non riesco proprio a capire come, se la geometria fosse totalmente incapace di rilevare un cambiamento dimensionale del tipo suggerito, le leggi del moto, che dipendono interamente dalla geometria, possano rilevarlo qualora esistesse. Il moto uniformein linea retta, ad esempio, presuppone una misurazione geometrica; se questa misurazione è errata, ciò che la meccanica immagina essere moto uniforme non lo è in realtà, ma la meccanica non può mai rilevare la discrepanza. Se le leggi del moto fossero state considerate*a priori*, la geometria avrebbe forse potuto trarne vantaggio; ma finché sono empiriche, presuppongono una misurazione geometrica e non possono quindi condizionarla o influenzarla.

La conclusione di Erdmann, nel secondo capitolo, è che la congruenza è probabile, ma non verificabile nell'infinitesimale; che la sua verità implica l'esistenza effettiva di corpi rigidi

(sebbene, a dire il vero, sappiamo che questi non esistono in senso stretto); che i corpi rigidi sono liberamente mobili e non modificano le proprie dimensioni durante la rotazione (monodromia di Helmholtz); che l'assioma delle tre dimensioni è certo, poiché piccoli errori sono impossibili; e che i restanti assiomi di Euclide – quelli della retta e delle parallele – sono approssimativamente, se non esattamente, veri per il nostro spazio reale (pp. 78, 83). Non discute però come la congruenza, secondo la suddetta visione, sia compatibile con la teoria atomica, o persino con le deformazioni osservate di corpi approssimativamente rigidi; né come, se lo spazio, come egli suppone, è omogeneo, i corpi rigidi possano non essere liberamente mobili nello spazio. Gli assiomi sono tutti raggruppati come empirici, e sembra, nei capitoli successivi, che Erdmann consideri la loro natura empirica sufficientemente dimostrata dalla loro applicabilità al materiale empirico (cfr. pp. 159, 165) – un criterio strano, che dimostrerebbe la stessa conclusione, con uguale facilità, sia per l'aritmetica che per le leggi del pensiero.

83. Il terzo capitolo, sulle conseguenze filosofiche della Metageometria, non necessita di essere discusso a lungo, poiché tratta più dello spazio che della geometria. Allo stesso tempo, varrà la pena trattare brevemente del criterio di apriorità di Erdmann. Su questo argomento è molto difficile scoprirne il significato, poiché sembra variare a seconda dell'argomento trattato. Così, a un certo punto (p. 147) egli rifiuta con la massima enfasi il

connessione kantiana tra *à priori* e soggettivo [97] , eppure in un altro momento (p. 96) considera ogni presentazione di cose esterne come in parte *à priori* , in parte empirica, semplicemente perché tale presentazione è dovuta a un'interazione tra noi e le cose, ed è quindi in parte dovuta all'attività soggettiva, in parte dovuta a oggetti esterni. Quindi, dice, la distinzione non è tra presentazioni diverse, ma tra diversi aspetti di una stessa presentazione. Questo sembra ritornare interamente al criterio psicologico kantiano della soggettività, con l'ulteriore svantaggio che rende la distinzione, come quella tra analitico e sintetico, epistemologicamente priva di valore. Eppure non esita mai a dichiarare ogni singola conoscenza a sua volta empirica. Il fatto sembra essere che, laddove desidera un criterio più logico, adotta una modifica del criterio di Helmholtz per le sensazioni. Se lo spazio è una forma *à priori* , dice, nessuna esperienza potrebbe mai cambiarlo (p. 108); Ma questa Metageometria si è dimostrata non essere valida, poiché possiamo intuire le percezioni che uno spazio non euclideo ci darebbe (p. 115). Ho criticato questo argomento quando ho discusso di Helmholtz; al momento ci occupiamo del criterio di apriorità di Erdmann. Il criterio della soggettività —sebbene egli lo utilizzi certamente nella discussione sull'apriorità dello spazio, e decida solennemente, per mezzo di esso, che lo spazio è sia *a priori* che empirico poiché un cambiamento in noi o nel mondo esterno potrebbe modificarlo (p. 97)— sembrerebbe, come molti altri suoi test, una sua svista: il criterio che intende utilizzare è quello di Helmholtz. Questo criterio, credo, con una leggera modifica della formulazione, potrebbe essere accettato; mi sembra una condizione necessaria, ma non sufficiente. L' *à priori* , possiamo dire, non è solo ciò che nessuna esperienza può cambiare, ma ciò senza il quale l'esperienza diventerebbe impossibile. È l'omissione di discutere le condizioni che rendono possibile l'esperienza geometrica (e meccanica), a mio avviso, che invalida le

conclusioni empiriche di Helmholtz ed Erdmann. Perché certe condizioni debbano essere necessarie per l'esperienza – sia per la costituzione della mente, sia per qualche altra ragione – è un'ulteriore questione, che introduce la relazione tra l' *à priori* e il soggettivo. Ma nel discutere la questione di quale conoscenza sia *à priori*A differenza della questione riguardante le ulteriori conseguenze dell'apriorità, è bene attenersi al criterio puramente logico e preservare così la nostra indipendenza dalle controversie psicologiche. Il fatto, se è vero, che il mondo possa essere tale da sfidare i nostri tentativi di conoscerlo, non invaliderà, con il criterio sopra esposto, la conclusione che certi elementi della conoscenza siano *a priori* ; infatti, che siano soddisfatti o meno, rimangono condizioni necessarie per l'esistenza di qualsiasi conoscenza.

84. Con questa cautela riguardo al significato di priorità, troveremo, credo, che le conclusioni dell'ultimo capitolo di Erdmann, sui principi di una teoria della geometria, sono ampiamente invalidate dalla diversità e dall'inadeguatezza dei suoi test dell'à *priori* . Egli inizia affermando, in conformità con la distorsione quantitativa notata sopra, che la questione sulla natura degli assiomi geometrici è completamente analoga alla corrispondente questione dei fondamenti della matematica pura (p. 138). Questo è, a mio avviso, un errore radicale: la funzione degli assiomi sembra infatti essere quella di stabilire quella base qualitativa sulla quale, come abbiamo visto, deve poggiare ogni confronto qualitativo. Ma nella matematica pura, questa base qualitativa è irrilevante, poiché lì ci occupiamo di pura quantità,*cioè*del risultato meramente quantitativo del confronto quantitativo, ove possibile, indipendentemente dalle qualità che sottendono al confronto. La geometria, comeinsiste Grassmann [98] , non dovrebbe essere classificata con la matematica pura, poiché si occupa di una materia che è data all'intelletto, non creata da esso. Gli assiomi forniscono i mezzi attraverso i quali questa materia viene resa quantitativa e non possono, pertanto, essere dedotti da considerazioni puramente quantitative.

Lasciando da parte questo punto, torniamo a Erdmann. Egli distingue, all'interno dello spazio, una forma e una materia: la forma deve contenere le proprietà comuni a tutte le estensioni, la materia le proprietà che distinguono lo spazio dalle altre estensioni. Questa distinzione, afferma, è puramente logica e non corrisponde a quella di Kant: materia e forma, per Erdmann, sono entrambe empiriche. Gli assiomi e le definizioni della geometria, dice, trattano esclusivamente della materia dello spazio. Sembra un peccato, dopo aver fatto questa distinzione, farne così poco uso: dopo poche pagine, viene abbandonata e non se ne traggono conseguenze epistemologiche. Il motivo, credo, è che Erdmann non ha compreso quanto si possa dedurre dalla sua definizione di estensione, come varietà in cui le dimensioni sono omogenee e interscambiabili. Questa proprietà è sufficiente a dimostrare la completa omogeneità di un'estensione, e quindi – dall'assenza di differenze qualitative tra gli elementi – la relatività della posizione e l'assioma di congruenza. Questa deduzione sarà fatta in dettaglio nel seguito [99] ; per ora, mi limito a osservare che ogni estensione, secondo questa visione, possiede tutte le proprietà (eccetto le tre dimensioni) comuni agli spazi euclidei e non euclidei. Gli assiomi che esprimono queste proprietà, pertanto, si applicano alla forma dello spazio e derivano unicamente dall'omogeneità, che Erdmann ammette (p. 171) come

principio di qualsiasi teoria dello spazio. La suddetta distinzione tra forma e materia, quindi, quando se ne deducono tutte le conseguenze, corrisponde alla distinzione tra gli assiomi che derivano dall'omogeneità dello spazio e quelli che non la derivano. Poiché dunque l'omogeneità è equivalente alla relatività della posizione, e la relatività della posizione è l'essenza stessa di una forma di esternalità, sembrerebbe che la sua distinzione tra forma e materia possa essere resa coestensiva anche con la distinzione tra *a priori* ed empirico in geometria. Su questo argomento, mi soffermerò ulteriormente nel Capitolo III.

Nella parte restante del capitolo, Erdmann insiste sul fatto che la linea retta, ecc., sebbene non astratta dall'esperienza, che non presenta in alcun modo linee rette, debba tuttavia, in quanto applicabile alle scienze per definizione empiriche, essere empirica (p. 159) – un criterio che sembra impiegare solo quando tutti gli altri fondamenti di un'opinione empirica falliscono, e che, ovviamente, non può mai rifiutarsi di funzionare, poiché tutti gli elementi della conoscenza sono suscettibili di essere applicati a qualche materiale empirico. Definisce inoltre la linea retta (p. 155) come una linea a curvatura costante pari a zero, come se la curvatura potesse essere misurata indipendentemente dalla linea retta. Persino gli assiomi aritmetici vengono dichiarati empirici (p. 165), poiché in un mondo in cui le cose fossero tutte irrimediabilmente diverse l'una dall'altra, questi assiomi non potrebbero essere applicati. Dopo questo richiamo a Mill, non ci sorprende, poche pagine più avanti (p. 172), un vago appello ai "logici inglesi" come a coloro che avrebbero dimostrato che la geometria è una scienza induttiva. Tuttavia, Erdmann dichiara, quasi nell'ultima pagina del suo libro (p. 173), che la geometria si distingue da tutte le altre scienze per l'omogeneità del suo materiale: un principio di cui non si trova alcuna applicazione in tutto il libro e che, come vedremo nel Capitolo III, contraddice apertamente le teorie filosofiche sostenute nelle pagine precedenti.

Nel complesso, dunque, non si può dire che Erdmann abbia fatto molto per rafforzare la posizione filosofica di Riemann e Helmholtz. L'ho criticato a lungo perché il suo libro appare di grande accuratezza e perché è indubbiamente la migliore difesa esistente della posizione che sostiene. Ora ci troveremo ad affrontare il compito opposto: difendere la Metageometria, dal punto di vista matematico, dagli attacchi di Lotze e di altri, e rivendicare per essa quel grado di importanza filosofica – ben inferiore, in realtà, alle speranze di Erdmann – che sembra effettivamente possedere.

Lotze.

85. L'argomentazione di Lotze riguardoalla Geometria [100] —che segue un'argomentazione metafisica sulla natura ontologica dello spazio e presuppone i risultati di tale argomentazione— consiste in due parti: la prima discute i vari significati logicamente attribuibili (pp. 233-247) alla proposizione che sono possibili spazi diversi da quello euclideo, e la seconda critica, in dettaglio, la procedura della Metageometria. La prima di queste questioni è molto importante e richiede notevole attenzione riguardo al significato logico di un giudizio di possibilità. Sebbene la discussione di Lotze sia eccellente sotto molti aspetti, non

riesco a convincermi che egli abbia colto l'unico vero senso in cui sono possibili spazi non euclidei. Cercherò di dimostrare questa affermazione nelle pagine seguenti.

86. Lotze inizia con un'affermazione alquanto sorprendente che, sebbene filosoficamente valida, non sembra trovare riscontro nella realtà storica. La geometria euclidea, dice, è stata scossa soprattutto dalla nozione kantiana di soggettività esclusiva dello spazio: se lo spazio è solo la nostra forma privata di intuizione, alla quale non esiste un analogo nel mondo oggettivo, allora altri esseri possono avere altri spazi, senza presupporre alcuna differenza nel mondo che essi organizzano in questi spazi (p. 233). Questa sembra certamente una deduzione legittima dalla soggettività dello spazio, la quale, lungi dallo stabilire la validità universale di Euclide, ne stabilisce la validità solo dopo un'indagine empirica sulla natura dello spazio così come intuita da Tom, Dick o Harry. Ma in realtà, coloro che hanno fatto di più per promuovere la geometria non euclidea – con l'eccezione di Riemann, che fu discepolo di Herbart – hanno di solito ereditato da Newton un realismo ingenuo riguardo allo spazio assoluto. Potrei citare il passo di Bolyai riportato nel CapitoloI, o Clifford, che sembra aver pensato che in realtà vediamo le immagini delle cose sullaretina [101] , o ancora la convinzione di Helmholtz sulla dipendenza della geometria dal comportamento dei corpi rigidi. Questa convinzione ha portato alla visione che la geometria, come la fisica, sia una scienza sperimentale, in cui la verità oggettiva può essere raggiunta, è vero, ma solo attraverso metodi empirici. Tuttavia, il fondamento di incertezza di Lotze riguardo a Euclide è un fondamento filosoficamente sostenibile, e sarà istruttivo osservare le varie possibilità che ne derivano.

Se lo spazio è solo una forma soggettiva – così Lotze apre la sua argomentazione – altri esseri possono avere una forma diversa. Se ciò corrisponde a un mondo diverso, la differenza, dice, non è interessante: perché solo il nostro mondo è rilevante per qualsiasi discussione metafisica. Ma se questo spazio diverso corrisponde allo stesso mondo che conosciamo nella forma euclidea, allora, a suo parere, ci troviamo di fronte a una questione di autentico interesse filosofico. E qui distingue due casi: *o* le relazioni tra le cose, che si presentano a questi esseri ipotetici sotto la forma di uno spazio diverso, sono relazioni che non ci appaiono, o comunque non ci appaiono spaziali; *oppure* sono le stesse relazioni che ci appaiono come figure nello spazio euclideo (p. 235). La prima possibilità sarebbe illustrata, dice, da esseri ai quali le varietà di tono o di colore apparivano estese; Ma, a suo parere, non possiamo immaginare una varietà, come quella richiesta in questo caso, che abbia dimensioni omogenee e comparabili *tra loro* ; pertanto, i contenuti delle varie rappresentazioni che costituiscono tale varietà non potrebbero essere combinati in un unico contenuto che li contenga tutti. Tuttavia, la possibilità di una tale combinazione è essenziale per qualsiasi cosa degna di essere chiamata spazio: quindi la prima delle possibilità sopra menzionate è priva di motivazione e di interesse. La conclusione di Lotze su questo punto, a mio avviso, è innegabile, ma dubito che la sua argomentazione sia molto convincente. Tuttavia, poiché questa possibilità non ha alcuna connessione con quella contemplata dai non euclidei, non vale la pena discuterne ulteriormente.

Anche la seconda possibilità, secondo Lotze, non è quella della Metageometria, ma in realtà vi si avvicina più di tutte le altre possibilità discusse. Se un non euclideo credesse al contempo nella soggettività dello spazio, dovrebbe aderire a questa visione. Vediamo più precisamente in cosa consiste. Nel Libro II , Capitolo I , Lotze ha accettato l'argomentazione dell'Estetica Trascendentale, ma ha respinto quella delle antinomie matematiche: ha stabilito che lo spazio è, come credeva Kant, soggettivo, ma possiede nondimeno ciò che Kant gli negava, una controparte oggettiva. La relazione tra lo spazio rappresentato e la sua controparte oggettiva, così come concepita da Lotze, è piuttosto difficile da comprendere. Sembra a malapena assomigliare alla relazione tra la sensazione e il suo oggetto – ad *esempio* , tra la luce e le vibrazioni dell'etere – perché se così fosse, lo spazio non sarebbe in alcun senso particolare soggettivo. Sembra piuttosto assomigliare alla relazione tra un movimento corporeo percepito e lo stato mentale della persona che lo desidera. Comunque sia, si suppone che la controparte oggettiva dello spazio consista in certe interazioni immediate tra monadi, le quali percepiscono tali interazioni come modificazioni dei propri stati interni. È evidente che queste interazioni non costituiscono l'oggetto di studio della geometria, che si occupa unicamente delle nostre percezioni risultanti delle figure spaziali. Ora, se la costruzione dello spazio di Lotze è corretta, non sembra esserci alcuna ragione per cui queste percezioni risultanti non debbano, per una stessa identica interazione tra monadi, essere molto diverse in esseri diversamente costituiti da noi. Ma se fossero diverse, afferma Lotze, dovrebbero essere completamente diverse, tanto diverse, ad esempio, quanto l'intervallo tra due note è diverso da una linea retta. La possibilità è, quindi, a suo parere, qualcosa di cui non possiamo sapere nulla e che deve rimanere sempre una mera idea vuota. Questo mi sembra un'esagerazione: qualunque sia la controparte oggettiva, qualsiasi argomento che ci fornisca informazioni su di essa deve, se ribaltato, fornirci informazioni su qualsiasi possibile forma di intuizione in cui questa controparte si presenti. L'argomento che Lotze ha usato nel suo capitolo precedente, ad esempio, deducendo, dalla relatività della posizione, la natura meramente relazionale della controparte oggettiva, ci permette, al contrario, di inferire, da questa natura relazionale, la completa relatività della posizione in qualsiasi possibile intuizione spaziale, a meno che, in effetti, essa non abbia una relazione del tutto ingannevole con quelle interazioni di monadi che costituiscono la sua controparte oggettiva. Ma la completa relatività della posizione, come cercherò di dimostrare nel Capitolo III.Ciò è sufficiente a dimostrare che la nostra geometria deve essere euclidea, ellittica, sferica o pseudo-sferica. Abbiamo, quindi, a quanto pare, una conoscenza considerevole, sulla base della teoria dello spazio di Lotze, del modo in cui ciò che a noi appare come spazio *deve* apparire a qualsiasi essere dotato delle nostre leggi del pensiero. Non possiamo sapere, è vero, quale teoria *psicologica* della percezione spaziale si applicherebbe a tali esseri: potrebbero avere un senso diverso dal nostro, e potrebbero non avere alcun senso che assomigli in alcun modo al nostro, eppure la loro geometria avrebbe punti di somiglianza con la nostra, come quella del cieco coincide con quella del vedente. Se lo spazio ha una controparte oggettiva, in breve, e se è possibile un'inferenza, come sostiene Lotze, dallo spazio alla sua controparte, allora è possibile anche un argomento inverso, sebbene possa

fornire solo alcune delle qualità dello spazio euclideo, poiché solo alcune di queste qualità possono essere trovate ad avere un analogo necessario nella controparte.

87. Ammettendo, dunque, nel senso di Lotze, la soggettività dello spazio, la possibilità di cui sopra non appare così vuota come egli immagina. La discute brevemente, tuttavia, per passare a quello che considera il vero significato della Metageometria. In questo si macchia di un errore matematico, che causa molti ragionamenti irrilevanti. Infatti crede che la Metageometria costruisca i suoi spazi a partire da linee rette e angoli in tutto e per tutto simili a quelli di Euclide, da cui deriva una facile vittoria nel dimostrare che questi elementi possono condurre a un solo spazio. In questo è stato tratto in inganno dalla fraseologia dei non euclidei, così come dalla separazione di Euclide tra definizioni e assiomi. Il fatto è, naturalmente, che le linee rette sono pienamente definite solo quando aggiungiamo alla definizione formale gli assiomi della linea retta e delle parallele. Nello spazio euclideo, la definizione di Euclide è sufficiente a distinguere la linea retta da tutte le altre curve; I due assiomi menzionati vengono quindi assorbiti nella definizione di spazio. Ma, a parte la restrizione allo spazio euclideo, la definizione deve essere integrata dai due assiomi per definire completamente la retta euclidea. Pertanto, Lotze ha frainteso la portata delle costruzioni non euclidee e ha semplicemente mancato il punto nella sua argomentazione. La possibilità contemplata da una costruzione non euclidea, se rientrasse in uno qualsiasi dei casi di Lotze, rientrerebbe nel secondo caso discusso sopra.

88. Ma la funzione della Metageometria è, a mio avviso, davvero diversa da qualsiasi cosa immaginata da Lotze; e poiché pochi autori sembrano chiari su questo punto, mi addentrerò in modo abbastanza completo in quello che ritengo essere il suo scopo.

In primo luogo, ci sono alcuni autori – in particolare Clifford – che, essendo realisti ingenui riguardo allo spazio, sostengono che le nostre prove siano del tutto insufficienti, per ora, per decidere sulla sua natura nell'infinito o nell'infinitesimale (cfr. Saggi, Vol. I, p . 320): questi autori non si occupano di alcuna possibilità di esseri diversi da noi, ma semplicemente dello spazio quotidiano che conosciamo, che indagano con lo spirito di un chimico che discute se l'idrogeno sia un metallo, o di un astronomo che discute l'ipotesi nebulare.

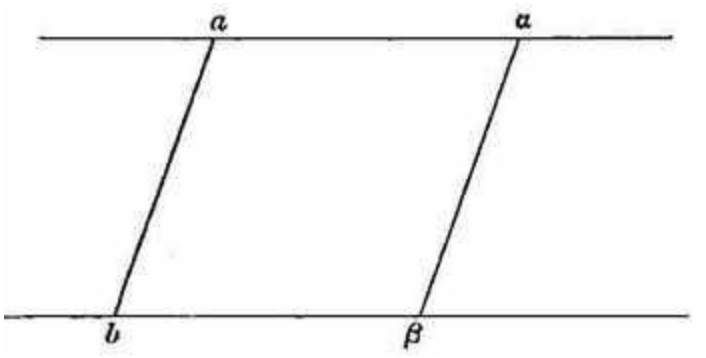
Ma questi sono una minoranza: la maggior parte, più cauta, ammette che il nostro spazio, per quanto si estenda l'osservazione, è euclideo, e se non esattamente euclideo, deve essere solo leggermente sferico o pseudo-sferico. Anche in questo caso, si discute dello spazio della vita quotidiana, e inoltre la discussione è, a mio avviso, indipendente da qualsiasi presupposto filosofico sulla natura della nostra intuizione spaziale. Infatti, anche se questa fosse puramente soggettiva, la traduzione di un'intuizione in una concezione può essere realizzata solo approssimativamente, entro gli errori di osservazione inerenti all'autoanalisi; e finché l'intuizione dello spazio non si trasforma in una concezione, non otteniamo alcuna geometria scientifica. La certezza apodittica dell'assioma delle parallele si riduce a una convinzione soggettiva non motivata e svanisce del tutto in coloro che nutrono dubbi non euclidei. Per rafforzare la fede euclidea, la ragione deve ora essere chiamata in aiuto dell'intuizione; Ma la ragione, purtroppo, ci abbandona, e siamo lasciati in balia di

osservazioni approssimative di triangoli stellari: un sostegno davvero esiguo per la religione tanto amata della nostra infanzia.

89. Ma la possibilità di un'imprecisione così lieve, che i nostri strumenti più raffinati e le nostre parallassi più distantinonne mostrino traccia, turberebbe le menti degli uomininonpiù dell'analoga possibilità di imprecisione nella legge di gravitazione, se non fosse per l'importanza filosofica anche della più esigua possibilità in questo ambito. Ed è proprio la rilevanza filosofica della Metageometria, credo, a costituirne la vera importanza. Anche se, come supporremo per il momento, l'osservazione avesse stabilito, al di là di ogni dubbio, che il nostro spazio potesse essere considerato con sicurezza euclideo, la Metageometria avrebbe comunque mostrato una possibilità filosofica, e solo per questo motivo potrebbe rivendicare, credo, quasi tutta l'attenzione che attualmente merita.

Ma qual è questa possibilità? Una cosa è possibile, secondo Bradley (Logica, p. 187), quando deriverebbe da un certo numero di condizioni, alcune delle quali sono note per essere realizzate. Ora, le condizioni a cui una forma di esternalità deve conformarsi, per essere affermata, sono: in primo luogo, naturalmente, che essa debba essere sperimentata, o legittimamente dedotta da qualcosa di sperimentato; ma in secondo luogo, che debba conformarsi a certe condizioni logiche, dettagliate nel Capitolo III, che possono essere riassunte nella relatività di posizione. Ora, ciò che Metageometry ha fatto, in ogni caso, è suggerire la dimostrazione che la seconda di queste condizioni è soddisfatta dagli spazi non euclidei. Euclide è affermato, quindi, sulla base della sola esperienza immediata, e la sua verità, in quanto non mediata da necessità logica, è semplicemente assertoria, o, se preferiamo, empirica. Questo è il senso più importante, a mio avviso, in cui gli spazi non euclidei sono possibili. Sono, in breve, un passo in un argomento filosofico, piuttosto che nell'indagine dei fatti: gettano luce sulla natura dei fondamenti di Euclide, piuttosto che sulla conformazione effettiva dello spazio [102] . Questa importanza della Metageometria è negata da Lotze, sulla base del fatto che la logica non euclidea è fallace, un motivo che egli si sforza, con molti dettagli e attraverso molte pagine, di rendere valido – con quale successo, ora procederemo ad esaminare.

90. L'attacco di Lotze alla Metageometria – sebbene rimanga, per quanto ne so, la migliore critica ostile esistente, e sebbene i suoi argomenti siano entrati a far parte del repertorio abituale dei filosofi euclidei – contiene, se non erro, diversi fraintendimenti dovuti a una conoscenza matematica insufficiente della materia. Poiché questi fraintendimenti sono ampiamente diffusi tra i filosofi e non possono essere facilmente eliminati se non da un critico che si sia addentrato nella geometria non euclidea con una certa attenzione, sembra opportuno discutere le critiche di Lotze punto per punto.



91. La critica matematica inizia (§ 131) con una definizione di rette parallele che dà per scontata una conclusione. Due rette$a\alpha$,$b\beta$, secondo questa definizione, sono parallele quando — *essendo a* e*b*punti arbitrari sulle due rette — se$a\alpha=b\beta$, allora$ab=\alpha\beta$, dove$a$eβsono rispettivamente altri due punti sulle due rette. Questa definizione — che contiene l'assioma e la definizione di Euclide combinatiin unaforma molto comoda e allettante — è ovviamente perfettamente adatta alla geometria euclidea e conduce immediatamente a tutte le proposizioni euclidee sulle parallele. Ma forse è più onesto seguire il percorso di Euclide; Quando un assioma è così nascostoin una definizione, si tende a pensare, dato che le definizioni sono considerate arbitrarie, che la difficoltà sia stata superata, mentre in realtà la possibilità di parallelismi, come definita sopra, implica proprio il punto in questione, ovvero l'assioma dei parallelismi contestato. Infatti, questo assioma afferma semplicemente l'esistenza di linee conformi alla definizione di Lotze. La deduzione delle proposizioni principali sui parallelismi, con cui Lotze fa seguire la sua definizione, è naturalmente un procedimento molto semplice, un procedimento, tuttavia, in cui il primo passo è una petizione di principio.

92. Il prossimo argomento a favore dell'priorità della geometria euclideaha, stranamente , un'impronta esattamente opposta, sebbene sia molto apprezzato dagli oppositori della metageometria. Le misurazioni dei triangoli stellari e tutti i tentativi simili di una determinazione empirica della costante spaziale sono, secondo Lotze, fuori luogo; infatti qualsiasi deviazione osservata da due angoli retti, o qualsiasi parallasse annua finita per stelle distanti, verrebbe attribuita a qualche nuovo tipo di rifrazione, o, come nel caso dell'aberrazione, a qualche altra causa fisica, e mai alla natura geometrica dello spazio. Questo è un argomento forte a favore della validità empirica di Euclide, ma come argomento a favore della certezza apodittica del sistema ortodosso, ha una tendenza opposta. Infatti, osservazioni del tipo contemplato dovrebbero essere dovute a deviazioni dalla rettilineità euclidea, fino ad allora sconosciute, da parte dei raggi luminosi stellari. Una tale deviazione potrebbe, in certi casi, essere spiegata da una costante spaziale finita, ma potrebbe anche, probabilmente, essere spiegata da un cambiamento nell'ottica, ad esempio, attribuendo proprietà rifrattive all'etere. Tali proprietà potrebbero esistere solo se l'etere avesse una densità variabile, se (diciamo) fosse più denso nelle vicinanze di uno qualsiasi dei corpi celesti. Ma una simile ipotesi, credo, distruggerebbe l'utilità dell'etere per la fisica; una lieve alterazione della nostra geometria, così lieve da non influenzare in modo apprezzabile le distanze all'interno del Sistema Solare, sarebbe probabilmente, alla fine, qualora tali errori

venissero mai scoperti, una spiegazione più semplice di qualsiasi altra che la fisica potrebbe offrire. Ma questo non è il punto della mia argomentazione. Il punto è che, se la spiegazione fisica, come sostiene Lotze, è possibile nel caso sopra descritto, deve valere anche il contrario: deve essere possibile spiegare i fenomeni attuali supponendo che l'etere sia rifrattivo e lo spazio non euclideo. Da questa conclusione non c'è scampo. Se ogni comportamento concepibile dei raggi luminosi può essere spiegato, all'interno di Euclide, da cause fisiche, deve essere anche possibile, mediante una scelta opportuna di ipotetiche cause fisiche, spiegare i fenomeni reali come appartenenti a uno spazio non euclideo. Tale ipotesi verrebbe giustamente respinta dalla Scienza, per ora, a causa della sua inutile complessità. Tuttavia, rimarrebbe, per la filosofia, una possibilità da prendere in considerazione, e la scelta potrebbe essere decisa solo su basi empiriche di semplicità. Si può ben dubitare che, nel mondo che conosciamo, i fenomeni possano essere attribuiti a uno spazio nettamente non euclideo, ma questa conclusione segue inevitabilmente dall'affermazione che nessun fenomeno potrebbe costringerci ad assumere un tale spazio. L'argomentazione di Lotze, quindi, se portata a termine, confuta la sua stessa tesi e pone lo spazio euclideo, come spiegazione empirica dei fenomeni, sullo stesso piano dell'etere luminifero[103].

93. Lotze passa ora (§ 132) a una critica dettagliata diHelmholtz, che considera un tipico esponente della Metageometria. È possibile che, all'epoca in cui scrisse, Helmholtz occupasse effettivamente questa posizione; ma è un peccato che, nella mente dei filosofi, egli continui a farlo, dopo i progressi concreti apportati dal trattamento proiettivo della materia. È altrettanto un peccato che i suoi tentativi, alquanto superficiali, di divulgare risultati matematici siano stati così spesso liquidati senza la dovuta attenzione ai suoi contributi più tecnici e solidi. Così, le sue fantasie su Flatlandia e Sfere – analogie fiabesche di dubbio valore, nella migliore delle ipotesi – sono state attaccate come se costituissero una caratteristica essenziale della Metageometria.

Ma veniamo al dunque: Lotze ammette senza problemi che gli abitanti delle Terre Piatte avrebbero elaborato la Geometria Planare, come la conosciamo, ma si rifiuta di ammettere che gli abitanti delle Sfere potrebbero, senza dedurre la terza dimensione, elaborare una Geometria Sferica bidimensionale che dovrebbe essere priva di contraddizioni. Cercherò di fornire una libera interpretazione dell'argomentazione di Lotze su questo punto.

Supponiamo, dice, un polo nord e un polo sud, N e S, fissati arbitrariamente, e un equatore EW. Supponiamo un essere, B, capace di impressioni solo da cose sulla superficie della sfera, che si muova lungo un meridiano NBS. Sia B che parta da un punto a e, infine, dopo aver descritto un cerchio massimo, ritorni allo stesso punto a. Se a è noto solo dalla qualità dell'impressione che fa a B, B potrebbe immaginare di non aver raggiunto lo stesso punto a, ma un altro punto simile a', che ha una relazione con a simile a quella dell'ottava nel canto: potrebbe persino non organizzare affatto le sue impressioni spazialmente. Affinché ciò possa accadere, è necessaria l'ulteriore ipotesi che ogni differenza nelle suddette sensazioni (come egli descrive il meridiano) possa essere presentata come

una distanza spaziale tra due luoghi. Anche ora, *B* potrebbe pensare di star descrivendo una retta euclidea, contenente punti simili a determinati intervalli. Ammesso, tuttavia, che egli realizzi l'identità di *a* con la sua posizione iniziale, ora gli sembrerà, con un movimento in linea retta, di essere tornato al punto di partenza, poiché il suo movimento, senza la terza dimensione, non può apparirgli se non rettilineo.

Fino a questo punto, sembra esserci poco da obiettare, fatta eccezione forse per l'idea di una linea retta con punti simili periodici: se *B* fosse filosofico come, in queste discussioni, di solito supponiamo che sia, probabilmente si opporrebbe a questa interpretazione delle sue esperienze, in quanto considera lo spazio vuoto come qualcosa di indipendente dagli oggetti in esso contenuti. Vale la pena sottolineare, inoltre, che *B* non avrebbe bisogno di descrivere l'intero cerchio per ritrovarsi improvvisamente a casa con i suoi vecchi amici. Misure precise di piccoli triangoli sarebbero sufficienti a determinare la sua costante spaziale e a mostrargli la lunghezza di un cerchio massimo (o di una linea retta, come la chiamerebbe lui). Dobbiamo anche ammettere che un essere ipotetico come *B* potrebbe non avere alcuna intuizione spaziale, ma poiché viene introdotto unicamente ai fini dell'analogia, è conveniente attribuirgli tutte le possibili qualifiche per il suo ruolo. Ma questi punti non toccano il nucleo dell'argomento, che risiede nell'affermazione che una tale linea retta, che ritorna su se stessa dopo un tempo finito, apparirebbe a *B* come una "contraddizione insopportabile", e lo costringerebbe quindi, per ragioni logiche ma non sensazionalistiche, ad assumere una terza dimensione. Questa affermazione mi sembra del tutto ingiustificata: l'intera Metageometria è una solida dimostrazione della sua smentita. L'argomento di Helmholtz è, bisogna ricordarlo, solo un'analogia, e la contraddizione esisterebbe *solo per un euclideo. Una geometria tridimensionale* completa , come abbiamo visto nel Capitolo I , è stata sviluppata sull'ipotesi che le linee rette abbiano lunghezza finita. Un valore *costante* per la misura della curvatura, come ha dimostrato la nostra discussione su Riemann, non implica né un riferimento alla quarta dimensione, né alcun tipo di contraddizione interna. Questo fatto confuta la tesi di Lotze, che deriva unicamente dall'incapacità di spogliare la sua immaginazione dalle idee euclidee.

Lotze attacca poi Helmholtz per l'affermazione che *B* non saprebbe nulla delle linee parallele, intendendo dire linee *rette parallele, come mostra il contesto* [104] . Lotze, tuttavia, lo interpreta come se intendesse, apparentemente, semplici curve a distanza costante da una data linea retta, che fanno parte del repertorio abituale della Metageometria. I paralleli di latitudine, in senso geografico, non apparirebbero a *B* , con l'eccezione dell'equatore, come linee rette, ma come cerchi. I cerchi *massimi* li *chiamerebbe* linee rette, e questo fatto sembra aver indotto Lotze a pensare che *tutti* i cerchi dovessero essere trattati come linee rette. I paralleli di latitudine, quindi, anche se *B* potrebbe chiamarli paralleli, non invaliderebbero l'affermazione di Helmholtz, che si applica solo alle linee rette.

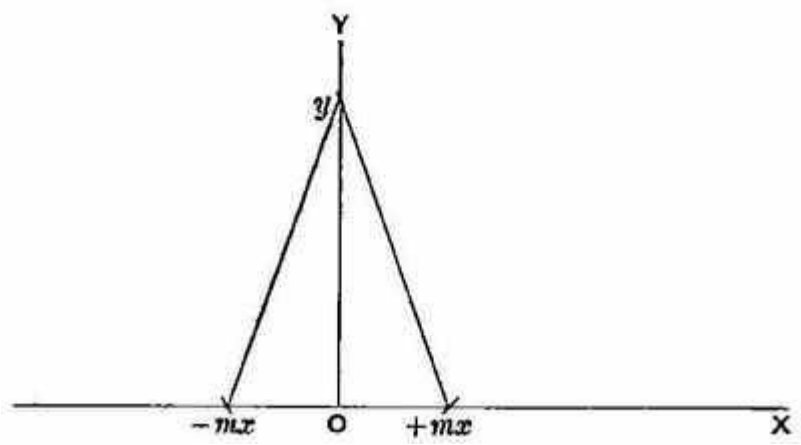
L'argomento secondo cui cerchi così piccoli sarebbero paralleli, di cui ci siamo appena liberati, è solo il preambolo a un'altra dimostrazione che *B* avrebbe bisogno di una terza dimensione. Chiamiamo due di questi paralleli di latitudine l_n e l_s , e supponiamo che siano

equidistanti dall'equatore, uno nell'emisfero settentrionale, l'altro in quello meridionale. I piani tangenti consecutivi, lungo questi paralleli, convergono, nel primo caso verso nord, nell'altro verso sud. O *B* potrebbe rendersi conto della loro differenza, dice Lotze, oppure no. Nel primo caso, che egli considera il più probabile, dimostra facilmente che *B* dedurrebbe una terza dimensione. Ma questa alternativa è, a mio avviso, del tutto inammissibile. I piani tangenti, come i piani euclidei in generale, non avrebbero alcun significato per *B* ; a meno che, in effetti, non fosse un metageometrista, cosa che, con tutta la sua sottigliezza metafisica e matematica, l'argomento presuppone che non sia – e a tale supposizione Lotze, certamente, è l'ultima persona che ha il diritto di obiettare. La dimostrazione di Lotze secondo cui questa è l'alternativa corretta si basa, se ho ben capito, su un errore grossolano nella geometria sferica ordinaria. *B* osserverebbe, dice, che i meridiani formavano angoli minori con il suo percorso verso il polo più vicino che verso quello più lontano: in realtà, sarebbero semplicemente perpendicolari al suo percorso in entrambe le direzioni. Ciò che Lotze intende è, forse, che tutti i meridiani si incontrerebbero prima in una direzione che nell'altra, e questo, naturalmente, è vero. Ma i poli, in cui si incontrano i meridiani, apparirebbero a *B* come i centri dei rispettivi paralleli, mentre i paralleli stessi apparirebbero come cerchi. Ora non riesco a capire quale difficoltà sorgerebbe, per *B* , nel supporre che due cerchi diversi abbiano centri diversi [105] . Dobbiamo quindi prendere la prima alternativa, ovvero che *B* non avrebbe alcuna conoscenza della direzione in cui convergevano i piani tangenti. Qui Lotze tenta, se non l'ho frainteso, di dimostrare una *reductio ad absurdum* : *B* penserebbe, dice, che sta descrivendo due percorsi interamente uguali nella direzione, e quindi *potrebbe* considerare entrambi i percorsi come cerchi in un piano. Si può osservare che la direzione, quando applicata a un cerchio nel suo insieme, è priva di significato; infatti la direzione, in tutta la Metageometria, può significare solo, anche quando applicata alle linee rette, direzione verso un punto. Parlare di due linee che non si incontrano come aventi la stessa direzione è un'introduzione surrogata dell'assioma delle parallele. A parte questo, non riesco a concepire alcuna obiezione, su*Per quanto riguarda B* , a tale opinione si dovrebbe dire " *deve"* , non *"potrebbe"* . L'intera argomentazione, pertanto, a meno che la sua oscurità non mi abbia tratto in inganno, deve essere dichiarata infruttuosa e inconcludente.

94. Dopo questa discussione preliminare di Sphereland, Lotze passa alla questione di una quarta dimensione, e da lì allo spazio sferico e pseudosferico. Come prima, sembra conoscere solo le affermazioni più superficiali e popolari di Helmholtz e Riemann, e non essersi sforzato di comprendere nemmeno i fondamenti della metageometria matematica. A causa di questa negligenza, gran parte di ciò che dice risulta del tutto privo di valore. Per cominciare, considera, come scopo della fiaba di Helmholtz, il suggerimento di una possibile quarta dimensione, mentre il vero scopo era esattamente l'opposto: rendere intelligibile uno spazio non euclideo puramente tridimensionale. Helmholtz ha introdotto Flatlandia solo perché la sua relazione con Sphereland è analoga alla nostra relazione conlo spazio sferico [106] . Ma Lotze afferma: Gli abitanti di Flatlandia non troverebbero alcuna difficoltàin una terza dimensione, poiché essa non contraddirebbe in alcun modo la loro geometria, mentre gli abitanti di Sphereland, a causa delle contraddizioni nel loro sistema bidimensionale, vi

sarebbero già giunti. Ho già cercato di rispondere a quest'ultima affermazione; la prima suona strana, in considerazione del tentativo, poche pagine dopo, di dimostrare *a priori* che tutte le forme di intuizione, in qualche modo analoghe allo spazio,*devono*avere tre dimensioni. Non si può fare a meno di sospettare che gli abitanti di Flatlandia, con due dimensioni invece di tre, farebbero un tentativo simile. Ma per tornare all'argomentazione di Lotze: Nessuna delle due analogie può essere usata, dice, per dimostrare che forse dovremmo istituire una quarta dimensione, poiché, per noi, non esistono contraddizioni o fenomeni altrimenti inspiegabili. Le uniche persone, per quanto ne so, che hanno usato questa analogia, sono il dottor Abbot e alcuni spiritualisti: il primo per scherzo, i secondi per spiegare certi fenomeni spiegati più semplicemente, forse, da Maskelyne e Cooke. Sebbene la conclusione di Lotze su questo argomento sia fondata, e una con cui Helmholtz avrebbe potuto concordare, a mio avviso le sue argomentazioni sono irrilevanti e poco convincenti. Egli afferma che esiste una differenza tra noi e gli abitanti della Sfera: questi ultimi sono stati logicamente costretti ad accettare una nuova dimensione, e l'hanno trovata possibile; noi non lo siamo, e la troviamo impossibile nel nostro spazio. Io ho sostenuto, al contrario, che nulla costringerebbe gli abitanti della Sfera ad assumere una terza dimensione, mentre la troverebbero impossibile esattamente come noi troviamo impossibile una quarta dimensione, non logicamente, cioè, ma solo come costruzione realizzabile in uno spazio dato.

Dopo un pezzo umoristico alquanto elefantiaco, sulle balene socialiste in un mare quadridimensionale *dell'eau sucrée* di Fourrier , Lotze procede a una dimostrazione, per mezzo della logica, che ogni forma di intuizione, che comprende l'intero sistema di relazioni ordinate di una varietà coesistente, *deve* avere tre dimensioni. Si potrebbe obiettare, per motivi *a priori* , a un simile tentativo: ciò che appartiene alla pura intuizione difficilmente potrebbe, si sarebbe pensato, essere determinato dal ragionamento *a priori* [107] . Non svilupperò, tuttavia, questo argomento qui, ma cercherò di evidenziare, per quanto la sua oscurità lo consenta, la particolare fallacia della dimostrazione in questione.



L'argomentazione di Lotze è la seguente. In questa discussione, sebbene la nostra terminologia sia necessariamente mutuata dallo spazio, ci occupiamo in realtà di una concezione molto più generale. Supponiamo, al fine di preservare l'omogeneità delle dimensioni, che la differenza (distanza) tra due elementi (punti) qualsiasi della nostra varietà

– per usare il termine di Riemann – sia dello stesso tipo e commensurabile con la differenza tra due altri elementi qualsiasi. Consideriamo una serie di elementi a distanze successive *x tali che la distanza* tra due elementi qualsiasi sia la somma delle distanze tra elementi intermedi. Tale serie corrisponde a una retta, che viene considerata come l' asse *x* . Una serie *OY* si dice perpendicolare all'asse *x* OX quando le distanze di un qualsiasi elemento *y* , su *OY* , da + *mx* e *-mx* sono uguali. Per nostra ipotesi, queste distanze sono confrontabili e qualitativamente simili a *x* e *y* . Finché *OY* è definita solo in relazione a *OX* , è concettualmente unica. Supponiamo ora che la stessa relazione che intercorre tra *OX* e *OY* sia possibile tra *OY* e una nuova serie *OZ* ; otterremmo quindi una terza serie *OZ* perpendicolare a *OY* , e di nuovo concettualmente unica, purché definita dalla sola relazione con *OY* . Potremmo procedere, allo stesso modo, a una quarta linea *OU* perpendicolare a *OZ* . Ma è necessario, per i nostri scopi, che *OZ* sia perpendicolare sia a *OX* che a *OY* . Senza questa condizione, *OZ* potrebbe estendersi in un altro mondo e non avere alcuna relazione corrispondente con *OX* : questa è una possibilità esclusa solo dalle nostre inevitabili immagini spaziali. A questo punto si giunge al nocciolo della questione. *OZ* , afferma Lotze, che, oltre ad essere perpendicolare a *OY* , è anche perpendicolare a *OX* , deve appartenere alla serie di *OY* , poiché queste erano definite solo dalla perpendicolarità a *OX* . *Pertanto* , conclude, può esistere una terza dimensione solo se *OZ* coincide con uno, e – non appena *OX* è considerato fisso – con uno *solo* , dei molti membri della serie *OY* .

In questa argomentazione è difficile – almeno per me – scorgere una qualche forza. L'unica spiegazione che riesco a darle è supporre che Lotze abbia trascurato la possibilità di infiniti diversi da un singolo infinito. In base a questa interpretazione, l'argomentazione potrebbe essere formulata così: esiste una serie infinita di *OY* che variano continuamente ; alla proprietà comune di questi, aggiungiamo un'altra proprietà, che dividerà il loro numero totale per infinito. Il rimanente *OZ* , quindi, deve essere determinato in modo univoco. Lo stesso tipo di argomentazione, tuttavia, dimostrerebbe che due superfici possono intersecarsi solo in un singolo punto, e innumerevoli altre assurdità. Il fatto è che gli infiniti possono essere di ordini diversi. Ad esempio, il numero di punti su una retta può essere considerato un singolo infinito, così come il numero di rette su un piano passante per un punto qualsiasi; quindi, moltiplicando, il numero di punti su un piano è un doppio infinito, ∞^2 , e se dividiamo questo numero per un singolo infinito, otteniamo ancora un numero infinito. L'argomentazione di Lotze presuppone quindi ciò che deve dimostrare, ovvero che il numero di rette perpendicolari a una data retta, passante per un punto qualsiasi, sia un singolo infinito, il che equivale all'assioma delle tre dimensioni. L'intero passaggio è così oscuro che il suo significato potrebbe essermi sfuggito. È ovvio *a priori* , tuttavia, come ho sottolineato all'inizio, che qualsiasi dimostrazione dell'assioma deve essere fallace in qualche punto, e l'interpretazione dell'argomentazione sopra riportata è l'unica che sono riuscito a trovare.

95. Il resto del capitolo è dedicato a un attacco allo spazio sferico e pseudo-sferico, con la motivazione che interferiscono con l'omogeneità delle tre dimensioni e con la similarità di tutte le parti dello spazio. Questo è semplicemente falso. Tali spazi, come la superficie di una sfera,*sono*esattamente uguali in tutta la loro estensione. Lotze dimostra, qui e altrove, di non

essersi preso la briga di scoprire cosa sia realmente la Metageometria. Io sostengo, e ho cercato di dimostrare in questo saggio, che la Congruenza sia un*a priori*, senza il quale la Geometria sarebbe impossibile; ma il desiderio di sostenere questo assioma è, come Lotze avrebbe dovuto sapere, il motivo preciso che ha portato la Metageometria a limitarsi a spazi di curvatura costante. Vediamo qui l'importanza di distinguere tra Helmholtz il filosofo e Helmholtz il matematico. Mentre il filosofo desiderava fare a meno della Congruenza, il matematico, come abbiamo visto nel CapitoloI, la mantenne e la sottolineò fortemente. Poco dopo, Lotze dimostra ancora una volta di essere stato tratto in inganno dalla sfortunata analogia con Sphereland. Una*superficie*, dice, può comprenderla; ma come si passa da questa a uno spazio sferico? O questa superficie è l'intero nostro spazio, come in Sphereland, oppure genera spazio attraverso un raggio che cresce gradualmente. Tali sfere concentriche, come Lotze sottolinea trionfalmente, generano naturalmente lo spazio euclideo. La sua disgiunzione, tuttavia, è completamente e totalmente falsa, e non avrebbe mai potuto essere suggerita da chiunque avesse anche solo una conoscenza superficiale della metageometria. Questo punto è meno elaborato del precedente, che, in tutta la sua nudità, viene così riformulato nell'ultima frase del capitolo: "Non riesco a convincermi che si possa, senza gli elementi dello spazio omogeneo, nemmeno formare o definire la rappresentazione di spazi eterogenei, o di spazi con misure di curvatura variabili". Come se tali spazi fossero mai stati definiti dalla matematica non euclidea!

In conclusione, Lotze esprime la speranza che la filosofia, su questo punto, non si lasci imporre dalla matematica. Io, al contrario, devo rallegrarmi del fatto che la matematica non si sia lasciata imporre dalla filosofia, ma abbia sviluppato liberamente un sistema importante e coerente, che merita, per la sua sottile analisi in elementi logici e fattuali, la gratitudine di tutti coloro che cercano una filosofia dello spazio.

96. Le obiezioni alla geometria non euclidea appena discusse si suddividono in quattro categorie:

I. Gli spazi non euclidei non sono omogenei; la metageometria, pertanto, reifica indebitamente lo spazio.

II. Implicano un riferimento a una quarta dimensione.

III. Non possono essere impostate senza un riferimento implicito allo spazio euclideo, o alla retta euclidea, dalla quale dipendono pertanto.

IV. Sono contraddittorie sotto uno o più aspetti.

Il lettore che mi ha seguito nel considerare fallaci queste quattro obiezioni, non avrà difficoltà a confutare qualsiasi altro critico della Metageometria, poiché questi sono gli unici argomenti matematici, per quanto ne so, mai addotti contro i non euclidei [108] . La validità logica della Metageometria e la possibilità matematica degli spazi non euclidei tridimensionali saranno quindi considerate, per tutto il resto del lavoro, sufficientemente dimostrate.

97. Si possono, in effetti, sollevare altre due obiezioni contro la Metageometria, ma queste hanno più un'importanza filosofica che strettamente matematica. La prima, che è stata posta alla base delle operazioni da Delbœuf, si applica ugualmente a tutti gli spazi non euclidei. La seconda, che per quanto ne so non è stata molto utilizzata, ma che mi sembra comunque degna di nota, si oppone direttamente ai soli spazi a curvatura positiva; ma se potesse screditarli, potrebbe gettare dubbi sul metodo con cui si ottengono tutti gli spazi uguali. Le due obiezioni sono:

I. Lo spazio deve essere tale da consentire la similitudine, *cioè* l'aumento o la diminuzione, in un rapporto costante, di tutte le linee di una figura, senza variazione degli angoli; mentre nelle figure non euclidee, le linee, come gli angoli, hanno una grandezza assoluta.

II. Lo spazio deve essere infinito, mentre gli spazi sferici ed ellittici sono finiti.

Tratterò la prima obiezione in relazione agli articoli di Delbœuf citati in precedenza. La seconda, che a mia conoscenza non è stata ampiamente utilizzata nella critica, sarà affrontata al Capitolo III.

Delbœuf.

98. I quattro articoli di M. Delbœuf nella Revue Philosophique contengono molto materiale che è già stato trattato nella critica di Lotze, e molto che è irrilevante per il nostro scopo attuale. L'unico punto che desidero discutere qui è la questione della grandezza assoluta, come viene chiamata, ovvero la questione se la possibilità di figure geometriche simili ma disuguali possa essere conosciuta *a priori* [109] .

Nel discutere questa questione, è importante innanzitutto distinguere chiaramente il senso in cui la grandezza assoluta è richiesta nella geometria non euclidea, da un altro senso, in cui sarebbe assurdo considerare qualsiasi grandezza come assoluta. I giudizi di grandezza possono derivare solo dal confronto, e se la metageometria richiedesse grandezze che potessero essere determinate senza confronto, meriterebbe certamente di essere condannata. Ma questo non è richiesto. Tutto ciò che richiediamo è che sia impossibile, mentre il resto dello spazio rimane inalterato, modificare la grandezza di una figura, rispetto ad altre figure, lasciando invariate le grandezze interne relative delle sue parti. Questa costruzione, possibile in Euclide, è impossibile in Metageometria. Dobbiamo discutere se tale impossibilità renda gli spazi non euclidei logicamente fallaci.

La posizione di M. Delbœuf su questo assioma — che egli chiama il postulato di omogeneità [110] — è che tutta la geometria deve presupporla e che, di conseguenza, la metageometria, sebbene logicamente corretta, è logicamente successiva a Euclide e può effettuare le sue costruzioni solo all'interno di uno spazio euclideo "omogeneo" (Rev. Phil. Vol. XXXVII , pp. 380-1). Sembrerebbe tuttavia pensare che l'omogeneità (nel suo senso) si apprenda dall'esperienza, sebbene su questo punto non sia molto esplicito. (Vedi Vol. XXXVIII , p. 129). In ogni caso, nei suoi articoli non viene offerta alcuna dimostrazione *a priori* . Come risultato

dell'esperienza, tutti ammetterebbero, la somiglianza è nota per essere possibile entro i limiti dell'osservazione; Ma il fatto che questa possibilità si estenda alle carte topografiche, che trattano una superficie sferica, dovrebbe renderci cauti nell'inferire, da un tale dato, la certezza di Euclide per gli spazi di grandi dimensioni. Inoltre, se l'omogeneità è empirica, la Metageometria, che ne fa a meno, non è necessariamente in dipendenza *logica* da Euclide, poiché omogeneità e isogeneità sono *logicamente* separabili. Supporrò , quindi, come unica affermazione che possa essere interessante per la nostra argomentazione, che l'omogeneità sia considerata *a priori* e logicamente essenziale per la geometria.

99. Ora, abbiamo visto, discutendo le concezioni di Erdmann sul giudizio di quantità, che nello spazio non euclideo, come in quello euclideo, una variazione di tutte le grandezze spaziali, nello stesso rapporto, non sarebbe affatto una variazione; i rapporti di tutte le grandezze rispetto alla costante spaziale rimarrebbero invariati, e la costante spaziale, in quanto criterio ultimo di confronto, non può, in alcun senso intelligibile, essere considerata dotata di una grandezza particolare. Le grandezze assolute della Metageometria, pertanto, sono assolute solo rispetto a qualsiasi altra grandezza *particolare* , non rispetto alle altre grandezze in generale. Se così non fosse, la natura comparativa del giudizio di grandezza verrebbe contraddetta e la Metageometria metrica diventerebbe assurda. Ma, allo stato attuale, la differenza rispetto a Euclide consiste unicamente in questo: nella Metageometria abbiamo, mentre in Euclide no, uno standard di paragone insito nella natura stessa del nostro spazio, che chiamiamo costante spaziale. Dobbiamo discutere se l'affermazione di tale standard comporti un'indebita reificazione dello spazio.

Non credo che sia così. Infatti, un'indebita reificazione dello spazio si verificherebbe solo se non fossimo più in grado di considerare la posizione come totalmente relativa e geometricamente definibile solo a partire da altre posizioni. Ma la relatività della posizione, come abbiamo ampiamente visto, è preservata da tutti gli spazi a curvatura costante: in tutti questi, le posizioni possono essere definite geometricamente solo mediante relazioni con nuove posizioni [111] . Questa serie di definizioni può condurre a un regresso infinito, ma può anche, come nello spazio sferico, formare un circolo vizioso e tornare alla posizione da cui è partita. Nessuna reificazione dello spazio, nessuna esistenza indipendente di semplici relazioni, sembra essere implicata in una tale procedura. Tutta la Metageometria, in breve, è una prova che la relatività della posizione è compatibile con la grandezza assoluta, nell'unico senso richiesto dagli spazi non euclidei. Dobbiamo quindi concludere che non vi è nulla di incompatibile, nel negare l'omogeneità (nel senso di Delbœuf), né con la natura relazionale dello spazio, né con la natura comparativa della grandezza. Quest'ultima obiezione *a priori* alla Metageometria, pertanto, non può essere sostenuta, e la questione deve essere decisa esclusivamente su basi empiriche. **100.** I fondamenti della geometria sono stati oggetto di molte speculazioni recenti in Francia, e ciò sembra richiedere una certa attenzione. Ma nonostante lo splendido lavoro svolto dai francesi sulla questione correlata del numero e della quantità continua, non riesco a convincermi che siano riusciti a far progredire in modo significativo la filosofia geometrica. I principali autori sono stati, dal punto di vista

matematico, *Calinon* e *Poincaré* , da quello filosofico, *Renouvier* e *Delbœuf* ; come mediatore tra matematica e filosofia, *Lechalas* .

Calinon , in un interessante articolo sull'indeterminatezza geometrica dell'universo, sostiene che qualsiasi geometria può essere applicata al mondo reale mediante un'ipotesi appropriata sul percorso dei raggi luminosi. Infatti, solo la Terra ci è nota in modo diverso dall'ottica, ed essa è una parte infinitesimale dell'universo. Questa linea di ragionamento è già stata discussa in relazione a Lotze, ma Calinon aggiunge un nuovo suggerimento, ovvero che la costante spaziale potrebbe forse variare nel tempo. Ciò implicherebbe una connessione causale tra lo spazio e altre cose, che sembra difficilmente concepibile e che, se considerata possibile, deve certamente distruggere la geometria, poiché la geometria dipende interamente dall'irrilevanza di

Causalità [112] . Inoltre, in tutte le operazioni di misurazione, si impiega del tempo; a meno che non si sappia che lo spazio è immutabile durante l'operazione, è difficile capire come i nostri risultati possano essere attendibili e come, di conseguenza, si possa scoprire una variazione del parametro. Si presenterebbero, infatti, le stesse difficoltà che derivano dal supporre che lo spazio non sia omogeneo.

Poincaré sostiene che la questione se accettare Euclide o la Metageometria sia una questione di convenienza e convenzione, non di verità; gli assiomi sono definizioni mascherate e la scelta tra le definizioni è arbitraria. Questa tesi è stata discussa nel Capitolo I , in relazione alla teoria della distanza di Cayley, da cui dipende.

Lechalas è un discepolo filosofico di Calinon. È un razionalista di tipo pre-kantiano, ma crede nella validità della Metageometria. Sostiene che la Geometria può fare a meno di tutti i postulati puramente spaziali e lavorare con soli assiomi di grandezza [113] , che, a suo parere, sono puramente analitici. Il principio di contraddizione, per lui, è l'unico e solo criterio di verità; costruiamo lunghe catene di ragionamento a partire dalle nostre premesse per vedere se emergono contraddizioni. Si potrebbe obiettare che questa visione, pur salvando la Geometria generale dall'essere logicamente empirica, la lascia solo empiricamente logica; questo dovrebbe, di fatto, essere il destino di ogni conoscenza *a priori* , se quella del signor Lechalas fosse l'unico criterio di verità. Tuttavia, egli conclude che la Geometria generale è apodittica, mentre lo spazio del nostro mondo reale, come tutti gli altri fenomeni, è contingente.

Delbœuf critica lo spazio non euclideo da un punto di vista ultrarealista: sostiene che lo spazio *reale* non è né omogeneo né isogeneo, ma che lo spazio *concepito* , come astratto dallo spazio reale, possiede entrambe queste proprietà. Non offre alcuna giustificazione per il suo spazio reale, che sembra essere mantenuto nello spirito del realismo ingenuo, né mostra come abbia acquisito la sua conoscenza intima della sua costituzione [114] . Le sue argomentazioni contro la Metageometria, nella misura in cui non sono ripetizioni di Lotze, sono state discusse sopra.

Renouvier , infine, è un kantiano puro, del tipo più ortodosso. Le sue opinioni sull'importanza, per la geometria, della distinzione tra giudizi sintetici e analitici, sono state discusse, in relazione a Kant, all'inizio del presente capitolo [115] .

101. Prima di iniziare l'argomentazione costruttiva del prossimo capitolo, cerchiamo di riassumere brevemente le teorie che sono state sostenute polemicamente nel corso delle critiche appena concluse. Abbiamo concordato, con Kant, di accettare la necessità di ogni possibile esperienza come criterio di verifica dell'à *priori* , ma abbiamo rifiutato, per il momento, di discutere il legame tra l' *à priori* e il soggettivo, ritenendo sufficiente il criterio puramente logico per il nostro scopo immediato. Abbiamo anche rifiutato di attribuire importanza alla distinzione tra analitico e sintetico, poiché ci è sembrato che si applicasse non a giudizi diversi, ma solo a diversi aspetti di un unico giudizio.

Abbiamo quindi discusso del tentativo di Riemann di identificare l'elemento empirico in geometria con l'elemento non deducibile dalle idee di grandezza, e abbiamo concluso che tale identificazione era dovuta a una confusione sulla natura della grandezza. Infatti, abbiamo affermato, i giudizi di grandezza richiedono sempre una base qualitativa, che non è esprimibile quantitativamente.

Nel criticare Helmholtz, abbiamo deciso che la Meccanica presuppone logicamente la Geometria, sebbene lo spazio presupponga la materia; ma che la materia che lo spazio presuppone, e alla quale la Geometria si riferisce indirettamente,

è una materia più astratta rispetto alla meccanica, una materia priva di forza e di attributi causali, e dotata solo degli attributi puramente spaziali necessari per la possibilità di figure spaziali. Ma abbiamo ammesso che la geometria, quando applicata alla matematica mista o alla vita quotidiana, richiede più di questo, richiede, di fatto, un modo per scoprire, nella materia più concreta della meccanica, o un corpo rigido, o un corpo la cui deviazione dalla rigidità segua una legge empiricamente scopribile. Pertanto, abbiamo convenuto di considerare la misurazione *effettiva* come empirica.

Le nostre conclusioni, per quanto riguarda l'empirismo di Riemann e Helmholtz, sono state rafforzate da una critica a Erdmann. Ci siamo quindi trovati ad affrontare un compito opposto, ovvero difendere la Metageometria contro Lotze. Abbiamo constatato che la Metageometria è possibile in due sensi. Il primo riguarda il nostro spazio reale e afferma che esso può avere una costante spaziale molto piccola; il secondo riguarda le teorie filosofiche dello spazio e afferma una possibilità puramente logica, lasciando la decisione all'esperienza. Abbiamo anche visto che le restrizioni matematiche di Lotze derivavano da una conoscenza insufficiente della materia e potevano essere tutte confutate da una migliore familiarità con la Metageometria.

Infine, abbiamo discusso la questione della grandezza assoluta e non vi abbiamo trovato alcun ostacolo logico agli spazi non euclidei. La nostra conclusione, quindi, per quanto ci sia ancora consentito giungere a una conclusione, è che tutti gli spazi con una costante spaziale sono *a priori* giustificabili e che la decisione tra di essi deve essere frutto dell'esperienza. Gli spazi senza costante spaziale, d'altra parte, ovvero gli spazi che non sono omogenei in tutta la loro estensione, li abbiamo ritenuti logicamente illogici e impossibili da conoscere, e pertanto da condannare *a priori* . La dimostrazione costruttiva di questa tesi costituirà l'argomento del capitolo seguente.

---

[67] La filosofia critica di Kant, Vol. I, p. 287.

[68] Per una discussione su Kant da un punto di vista meno puramente matematico, vedere il capitolo IV.

[69] Cfr. Commento di Vaihinger, II. pp. 202, 265. Anche p. 336 ss.

[70] Ad esempio, seconda edizione, p. 39: "So werden auch alle geometrischen Grundsätze, z. B. dass in einem Triangel zwei Seiten zusammen grösser sind als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung, und zwar *à priori* mit apodiktischer Gewissheit abgeleitet."

[71] Cfr. Logica di Bradley, Libro III, Parte I , Capitolo VI ; Logica di Bosanquet, Libro I , Capitolo I , pp. 97–103.

[72] Philosophie de la Règle et du Compas, Année Philosophique, II. pagine 1–66.

[73] Ho enunciato questa dottrina in modo dogmatico, poiché una dimostrazione richiederebbe un intero trattato di logica. Accetto le dimostrazioni offerte da Bradley e Bosanquet, alle quali si rimanda il lettore.

[74] Per un'ulteriore discussione di questo punto, vedere i capitoli III e IV .

[75] Vedere il capitolo IV per una discussione di questo argomento .

[76] Vedere Cap . IV. § 185 .

[77] Qui si intende un'alterità di sostanza, piuttosto che di attributo; un'alterità che forse si può definire reale in contrapposizione alla diversità logica.

[78] Questa tesi verrà ampiamente argomentata nel capitolo IV.

[79] Vedi Psychologie als Wissenschaft, I. Sezione III. Cap. VII. ; II. Sezione I. Cap. III. e Sezione II. Cap. III. Confronta anche Synechologie, Sezione I. Capp. II. e III.

Sull'influenza di Herbart su Riemann si confronti Erdmann, Die Axiome der Geometrie, p.

[81] Non intendo dire che la misurazione dei colori avvenga senza riferimento alle loro relazioni, poiché ogni misurazione è essenzialmente un confronto. Ma nei colori sono gli

elementi che vengono confrontati, mentre nello spazio sono le relazioni tra gli elementi. [82] Per una discussione su questo punto, vedere Cap . III, Sez . B, § 176.

[83] Le opere di Helmholtz sulla filosofia geometrica comprendono, oltre agli articoli citati nel cap. I. , i seguenti articoli: "Ursprung und Sinn der geometrischen Axiome, gegen Land", Wiss. Abh. vol. II. P. 640, 1878. (Anche Mind, vol. III.: una risposta a Land in Mind, vol. II.) "Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome", 1870, Vorträge und Reden, vol. II. P. 1. (Anche Mind, vol. I.) Due appendici a "Die Thatsachen in der Wahrnehmung", intitolate: II. "Der Raum kann trascendentale sein, ohne dass es die Axiome sind"; e III. "Die Anwendbarkeit der Axiome auf die physische Welt", 1878, Vorträge und Reden, vol. II. P. 256 ss.

Le due appendici menzionate per ultime sono divulgazioni e ampliamenti dell'articolo pubblicato su Mind, Vol. III. L'opera di Helmholtz sulla geometria più letta, sebbene a mio avviso anche la meno preziosa, è l'articolo pubblicato su Mind, Vol. I. Questo contiene le famose e spesso fraintese analogie tra Flatlandia e Sferografia, che saranno discusse e, per quanto possibile, difese in risposta all'attacco di Lotze alla Metageometria, un attacco basato, a quanto pare, quasi interamente su questo unico articolo divulgativo. La presente discussione, pertanto, può essere limitata quasi esclusivamente a Mind, Vol. III , e alle parti filosofiche dei due articoli citati nel Capitolo I , *ovvero* agli articoli pubblicati su Wiss. Abh. Vol. II, pp. 610-660. Le sue altre opere sono divulgative e importanti solo per il vasto pubblico a cui si rivolgono.

[84] Nella risposta a Terra, Mente, Vol. III. e Saggezza Abh. II. p. 640.

[85] Cfr. anche Die Thatsachen in der Wahrnehmung, Zusatz II. , Der Raum kann trascendentale sein, ohne dass es die Axiome sind. Vorträge und Reden, vol. II.

[86] Vedi sotto, critica di Erdmann, § 84.

[87] Vedi Prof. Land, in Mind, Vol. II.

[88] Vedi il paragrafo conclusivo dell'articolo di Helmholtz in Mind, Vol. III.

[89] Cfr. Veronese, Grundzüge der Geometrie (traduzione tedesca), p. ix. Anche pp. xxxiv, 304 e Nota II. pp. 692–4.

[90] Cfr . cap . IV. § 197 ss.

[91] Cfr. l'opinione di Bolyai, citata da Erdmann, Axiome, p. 26; cfr. anche ib. p. 60.

[92] Die Axiome der Geometrie: Eine philosophische Untersuchung der RiemannHelmholtz'schen Raumtheorie, Lipsia, 1877.

[93] Sull'influenza di Mill, cfr. Stallo, Concetti di fisica moderna, p. 216.

[94] Questa visione sembra derivare, tramite Riemann, da Herbart. Vedi Psych. als Wiss. ed. Hart. Vol. V. p. 262.

[95] La stessa irriducibilità dello spazio alla mera grandezza è dimostrata dalle mani di Kant e dai triangoli sferici, nei quali persiste una differenza nonostante la completa uguaglianza quantitativa.

[96] Vedere §§ 146–7.

[97] «Jeder Versuch, Lehre von der Apriorität als des soggettin di Kant, von aller Erfahrung absolut unabhängigen Erkenntnissfactors, trotzdem zu halten, ist deshalb von voruherein aussichtslos».

[98] Ausdehnungslehre von 1844, 2a edizione, pp. xxii. XXIII.

[99] Vedere § 129 e seguenti.

[100] Metafisica, Libro II. Cap. II. I miei riferimenti sono all'originale.

[101] Vedi Lezioni e saggi, Vol. I. p. 261.

[102] Sul significato della possibilità geometrica, cfr. Veronese, Grundzüge der Geometrie (traduzione tedesca), pp. xi.-xiii.

[103] Confronta Calinon, "Sur l'Indétermination géométrique de l'Univers", Revue Philosophique, 1893, vol. XXXVI. pagine 595–607.

[104] Vorträge und Reden, vol. II. P. 9: "Parallele Linien würden die Bewohner der Kugel gar nicht kennen. Sie würden behaupten, dass jede beliebige due *geradeste* Linien, gehörig verlangert, sich schliesslich nicht nur in einem, sondern in due Punkten schneiden müssten." (Il corsivo è mio.) L'omissione della *parola diritto* in tali frasi è un frequente lassismo dei matematici.

[105] Mi è stato suggerito che Lotze considera i meridiani come proiettati su un piano, come in una mappa. Se così fosse, si tratterebbe di un'introduzione ovviamente illegittima della terza dimensione.

[106] Ciò è dimostrato dall'osservazione di Helmholtz al termine di un dettagliato tentativo di rendere immaginabili spazi sferici e pseudo-sferici (lcp 28): "Anders ist es mit den drei Dimensionen des Raumes. Da alle unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei

Dimensionen erstrecken, und die vierte Dimension nicht bloss eine Abänderung von Vorhandenem, sondern etwas vollkommen Neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organization in der Absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen."

[107] Cfr. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, 2a edizione, p. XXIII.

[108] Cfr. soprattutto Stallo, Concepts of Modern Physics, International Science Series, vol. XLII. Cap. XIII. e XIV. ; Renouvier, "Philosophie de la règle et du compas", Année Philosophique, II. ; Delbœuf, "L'ancienne et les nouvelles géométries", Revue Philosophique, vols. XXXVI.-XXXIX.

[109] A M. Delbœuf va riconosciuto il merito di aver basato Euclide, già nel 1860, nei suoi *"Prolégomènes Philosophiques de la Géométrie",* su questo assioma, certamente una base migliore, a prima vista, rispetto all'assioma delle parallele.

[110] Questo significato di omogeneità non deve essere confuso con il senso in cui ho usato la parola. Nel senso di Delbœuf, significa che le figure possono essere simili anche se di dimensioni diverse; nel mio senso significa che le figure possono essere simili anche se si trovano in luoghi diversi. Questa proprietà dello spazio è chiamata da Delbœuf isogeneità.

[111] Per una dimostrazione completa di questa proposizione, vedere Cap. p . III.

[112] Cfr . cap . III. , in particolare il § 133 .

[113] Per una critica di questa visione, si vedano le discussioni precedenti su Riemann ed Erdmann.

[114] Cfr. Couturat, "De l'Infini Mathématique", Parigi, Félix Alcan, 1896, p. 544.

[115] Quello che segue è un elenco dei più importanti scritti filosofici francesi recenti sulla geometria, per quanto ne so.

Andrade: "Les bases expérimentales de la géométrie euclidienne"; Rev. Phil. 1890, II. e 1891, IO.

Bonnel: "Les Hypothèses dans la géométrie"; Gauthier-Villars, 1897.

L'Abbé de Broglie: "La géométrie non-euclidienne", due articoli; Annales de Phil. Chrét. 1890.

Calinon: "Les espaces géométriques"; Rev. Phil. 1889, I. , e 1891, II. "Sur l'indétermination géométrique de l'univers"; ib. 1893, II.

Couturat: "L'Année Philosophique de F. Pillon", Rev. de Mét. et de Morale, gennaio 1893.

"Note sur la géométrie non-euclidienne et la relativité de l'espace"; ib., maggio 1893.

"Études sur l'espace et le temps", ib. Settembre 1896.

Delbœuf: "L'ancienne et les nouvelles géométries", quattro articoli; Rev. Phil. 1893–5.

Lechalas: "La géométrie générale"; Critico. Fil. 1889.

"La géométrie générale et les jugements synthétiques à priori" e "Les bases expérimentales de la géométrie"; Rev. Phil. 1890, II.

"M. Delbœuf et Le problème des mondes semblables"; ib. 1894, I.

"Note sur la géométrie non-euclidienne et le principe de similititude"; Rev. de Mét. et de Morale, marzo 1893.

"La courbure et la distance en géométrie générale"; ib., marzo 1896.

"La géométrie générale et l'intuition"; Annales de Phil. Chrét., 1890. "Etude sur l'espace et le temps"; Parigi, Alcan, 1896.

Liard: "Des définitions géométrie et des définitions empiriques", 2a ed.; Parigi, Alcan, 1888.

Palazzo: "Premiers principes de la métagéométrie"; due articoli in Rev. Néo-Scholastique, 1896. Pubblicato separatamente, Gauthier-Villars, 1896.

Milhaud: "La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance"; Rev. Phil. 1888, I.

Poincaré: "Geometria non euclidea"; Natura, vol. XLV , 1891-2.

"L'espace et la géométrie"; Rev. de Mét. et de Morale, novembre 1895.

"Risposta a quelle critiche", ib. Gennaio 1897.

Renouvier: "Philosophie de la règle et du compas"; Critico. Phil., 1889, e L'Année Phil., II me année, 1891.

Sorel: "Sur la géométrie non-euclidienne"; Rev. Phil., 1891, I.

Conceria: "Théorie de la connaissance mathématique"; Rev. Phil., 1894, II.

CAPITOLO III.

Sezione A.

GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA.

102. La geometria proiettiva propriamente detta, come abbiamo visto nel CapitoloI, non impiega il concetto di grandezza e non richiede, quindi, quegli assiomi che, nei sistemi del secondo periodo o periodo metrico, erano necessari unicamente per rendere possibile l'applicazione della grandezza allo spazio. Ma abbiamo anche visto che la riduzione di Cayley delle proprietà metriche a proprietà proiettive era puramente tecnica e filosoficamente irrilevante. Ora, è solo nelle proprietà metriche – a parte l'eccezione all'assioma della retta, che tuttavia presupponeproprietà metriche [116] –che gli spazi non euclidei ed euclidei differiscono. Le proprietà trattate dalla geometria proiettiva, quindi, nella misura in cui queste si ottengono senza l'uso di immaginari, sono proprietà comuni a tutti gli spazi. Infine, le differenze che appaiono tra le geometrie di spazi diversi della stessa curvatura –*ad esempio*tra le geometrie del piano e del cilindro – sono differenze nelleproprietà proiettive [117] . Pertanto, la necessità, che si presenta nella geometria metrica, di ulteriori qualificazioni oltre

a quelle della curvatura costante, scompare quando il nostro spazio generale è definito da proprietà puramente proiettive.

103. Abbiamo quindi buone ragioni per aspettarci che gli assiomi della geometria proiettiva rappresentino l'espressione più semplice e completa dei requisiti indispensabili di qualsiasi ragionamento geometrico: e spero che questa aspettativa non venga delusa. La geometria proiettiva, nella misura in cui si occupa solo delle proprietà comuni a tutti gli spazi, risulterà, se non erro, interamente*a priori*, non prevarrà sull'esperienza e avrà, come l'aritmetica, come oggetto una creatura del puro intelletto. Se così fosse, si tratterebbe di quel ramo della matematica pura che Grassmann, nella sua*Ausdehnungslehre*del 1844, ritenne possibile e tentò,in unbrillante fallimento, di costruire senza alcun ricorso allo spazio dell'intuizione.

104. Ma sfortunatamente, il compito di scoprire gli assiomi della geometria proiettiva è tutt'altro che facile. Non hanno ancora trovato un Riemann o un Helmholtz che li formulasse filosoficamente. Molti geometri hanno costruito sistemi che intendevano essere, e che, con sufficiente attenzione nell'interpretazione, sono effettivamente, liberi da presupposti metrici. Ma questi presupposti sono così radicati in tutti gli elementi stessi della geometria, che il compito di eliminarli richiede una ricostruzione dell'intero edificio geometrico. Così Euclide, ad esempio, si occupa, fin dall'inizio, dell'uguaglianza spaziale: impiega il cerchio, che è necessariamente definito per mezzo dell'uguaglianza, e basa tutte le sue successive proposizioni sulla congruenza dei triangoli come discusso nel Libro I. [118] Prima di poter utilizzare una qualsiasi proposizione elementare di Euclide, quindi, anche se questa esprime una proprietà proiettiva, dobbiamo dimostrare che la proprietà in questione può essere dedotta mediante metodi proiettivi. In generale, ciò non è stato fatto dai geometri proiettivi, i quali hanno troppo spesso presupposto, ad esempio, che la costruzione quadrilatera – mediante la quale, come abbiamo visto nel CapitoloI, introducono le coordinate proiettive – o il rapporto anarmonico, che è*a prima vista*metrico, potessero essere stabiliti in modo soddisfacente sui loro principi. Entrambi questi presupposti, tuttavia, possono essere giustificati e possiamo quindi ammettere che le affermazioni della geometria proiettiva sull'indipendenza logica della misura o della congruenza siano valide. Vediamo dunque come procede.

105. In primo luogo, è importante rendersi conto che quando si usano le coordinate, nella geometria proiettiva, non si tratta di coordinate nel senso metrico ordinario,*ovvero* di misure numeriche di determinate grandezze spaziali. Al contrario, sono un insieme di numeri, assegnati arbitrariamente ma sistematicamente a punti diversi, come i numeri civicidi unastrada, e servono, da un punto di vista filosofico, solo come comode designazioni per i punti che l'indagine intende distinguere. Se non fosse per la brevità dell'alfabeto, infatti, potrebbero, come in Euclide, essere sostituite da lettere. Il modo in cui vengono introdotte e il

loro significato sono stati trattati nel CapitoloI. Qui ci limitiamo a ripetere un avvertimento, la cui negligenza ha portato a molti fraintendimenti.

106. La distinzione tra vari punti, dunque, non è una conseguenza, ma una condizione del sistema di coordinate proiettivo. Il sistema di coordinate è un insieme di punti del tutto estraneo e meramente conveniente, che non tocca in alcun modo l'essenza della geometria proiettiva. Ciò da cui dobbiamo partire, in questo ambito, è la possibilità di distinguere vari punti l'uno dall'altro. Questa può essere designata, con Veronese, come il primo assioma dellageometria[119]. Il modo in cui definiamo un punto e come lo distinguiamo dagli altri punti è per il momento irrilevante; perché qui desideriamo solo scoprire la natura della geometria proiettiva e il tipo di proprietà che essa utilizza e dimostra. Come, e con quale giustificazione, le utilizza e le dimostra, lo discuteremo in seguito.

107. Ora è ovvio che una semplice collezione di punti, distinti l'uno dall'altro, non può fondare una geometria: dobbiamo avere un'idea del modo in cui i punti sono interrelati, per avere un oggetto di discussione adeguato. Ma poiché sono escluse tutte le idee di quantità, le relazioni tra i punti non possono essere relazioni di distanza nel senso ordinario, né tantomeno, nel senso della geometria ordinaria, rapporti anarmonici, poiché i rapporti anarmonici sono solitamente definiti come rapporti di quattro distanze, o di quattro seni, e sono quindi quantitativi. Ma poiché ogni confronto quantitativo presuppone un'identità di qualità, possiamo aspettarci di trovare, nella geometria proiettiva, i substrati qualitativi della sovrastruttura metrica.

E questo, come vedremo, è effettivamente vero. Non abbiamo la distanza, ma *la* linea retta; non abbiamo un rapporto anarmonico quantitativo, ma abbiamo *la* proprietà, in quattro punti qualsiasi su una linea, di essere le intersezioni con i raggi di un dato fascio. E da questa base, possiamo costruire una scienza qualitativa dell'esteriorità astratta, che è la geometria proiettiva. Come ciò avvenga, ora procederò a mostrarlo.

108. Ogni ragionamento geometrico è, in ultima analisi, circolare: se partiamo dal presupposto dei punti, questi possono essere definiti solo dalle linee o dai piani che li mettono in relazione; e se partiamo dal presupposto delle linee o dei piani, questi possono essere definiti solo dai punti attraverso i quali passano. Questo è un cerchio inevitabile, il cui fondamento di necessità apparirà man mano che procederemo. È quindi alquanto arbitrario partire dai punti o dalle linee, come illustra matematicamente l'eminente principio proiettivo della dualità; tuttavia, sceglieremo, con la maggior parte dei geometri, di partire daipunti[120]. Supponiamo, quindi, come nostro dato di riferimento, un insieme di punti discreti, per il momento senza riguardo alle loro interconnessioni. Ma poiché le connessioni sono essenziali per qualsiasi ragionamento su di essi come un sistema, introduciamo, per cominciare, l'assioma della retta. Due qualsiasi dei nostri punti, diciamo, giacciono su una retta che quei due punti definiscono completamente. Questa retta, essendo determinata dai due punti, può essere considerata come una relazione tra i due punti, o un aggettivo del sistema formato da entrambi insieme. Questo è l'unico aggettivo puramente qualitativo – come verrà dimostrato in seguito – di un sistema di due punti. Ora, la geometria proiettiva può tenere conto solo di

aggettivi qualitativi e può distinguere punti diversi solo in base alle loro relazioni con altri punti, poiché tutti i punti,*di per sé* , sono qualitativamente simili. Ne consegue che, per la geometria proiettiva, quando sono dati solo due punti, questi sono qualitativamente indistinguibili da qualsiasi altro paio di punti sulla stessa retta, poiché qualsiasi coppia di tali altri punti ha la stessa relazione qualitativa. Reciprocamente, poiché una retta è una figura determinata da due qualsiasi dei suoi punti, e tutti i punti sono qualitativamente simili, ne consegue che tutte le rette sono qualitativamente simili. Possiamo quindi considerare un punto come determinato da due rette che si incontrano in esso, e il punto, in quest'ottica, diventa l'unica relazione qualitativa tra le due rette. Pertanto, se il punto viene considerato semplicemente come dato, le due rette sono qualitativamente indistinguibili da qualsiasi altra coppia passante per quel punto.

109. L'estensione di questi due principi reciproci è l'essenza di tutte le trasformazioni proiettive, e in effetti di tutta la geometria proiettiva. Le operazioni fondamentali mediante le quali le figure vengono trasformate proiettivamente sono chiamate proiezione e sezione. Le varie forme di proiezione e sezione sono definite nel capitoloI, da cui cito il seguente passaggio.

" *Proiettare da un punto fisso S* (il *centro di proiezione*) una figura (*ABCD* ... *abcd* ...) composta da punti e linee rette, significa costruire le linee rette o *raggi di proiezione SA* , *SB* , *SC* , *SD* , ... e i piani (*piani di proiezione*) *Sa* , *Sb* , *Sc* , *Sd* , ... Otteniamo così una nuova figura composta da linee rette e piani che passano tutti per il centro *S*.

" *Tagliare mediante un piano fisso σ (piano trasversale*) una figura (*αβγδ* ... *abcd* ...) composta da piani e linee rette, significa costruire le linee rette o *tracce σα, σβ, σγ* ... e i punti o *tracce σa, σb, σc* . ... [121] In questo modo otteniamo una nuova figura composta da linee rette e punti giacenti nel piano *σ* .

" *Proiettare da una retta fissa s* (l' *asse z*) una figura *ABCD* composta da punti significa costruire i piani *sA* , *sB* , *sC* .... La figura così ottenuta è composta da piani che passano tutti per l'asse *s* . "

" *Tagliare con una retta fissa s* (una *trasversale*) una figura *αβγδ* ... composta da piani, significa costruire i punti *sα* , *sβ* , *sγ* .... In questo modo si ottiene una nuova figura, composta da punti tutti giacenti sulla trasversale fissa *s* .

"Se una figura è composta da rette *a* , *b* , *c* ... che passano tutte per un punto fisso o *centro S* , essa può essere *proiettata* da una retta o *asse s* passante per *S* ; il risultato è una figura composta da piani *sa* , *sb* , *sc* ....

"Se una figura è composta da rette *a* , *b* , *c* ... tutte giacenti su un piano fisso, essa può essere tagliata da una retta (trasversale) *s* giacente sullo stesso piano; la figura risultante è formata dai punti *sa* , *sb* , *sc* ... "

110. L'applicazione successiva, a una qualsiasi figura, di due operazioni reciproche di proiezione e sezione, è considerata tale da produrre una figura indistinguibile dalla prima, a

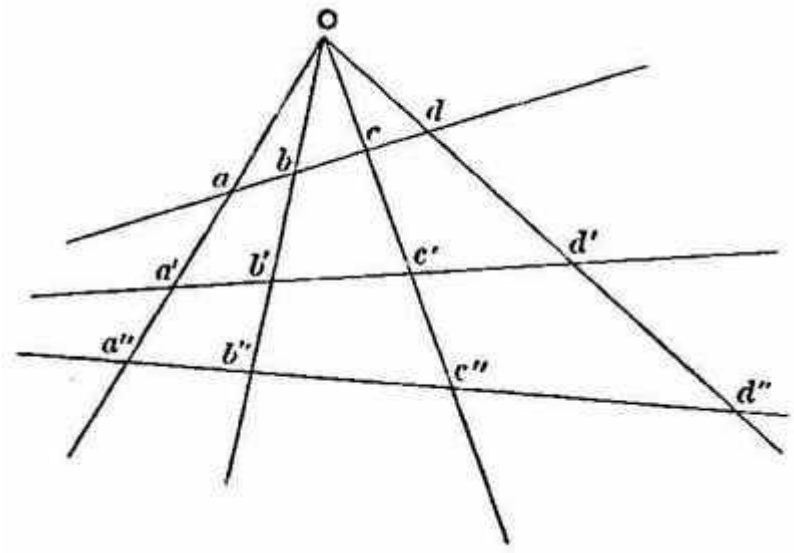
condizione che le dimensioni della figura originale siano le stesse di quelle della figura risultante, ovvero che, ad esempio, se la seconda operazione è la sezione mediante un piano, la figura originale sarà stata una figura piana. Le figure ottenute da una data figura, mediante sola proiezione o sola sezione, sono correlate a tale figura dal principio di dualità, del quale parleremo in seguito.

Nel seguito cercherò di dimostrare, in primo luogo, in che senso le figure ottenute l'una dall'altra mediante trasformazione proiettiva siano qualitativamente simili; in secondo luogo, quali assiomi, o aggettivi dello spazio, siano implicati nel principio di trasformazione proiettiva; e in terzo luogo, che questi aggettivi devono appartenere a qualsiasi forma di esteriorità con più di una dimensione e sono, pertanto, proprietà *a priori* di qualsiasi spazio possibile.

Per semplicità, mi limiterò in generale a due dimensioni. Così facendo, non introdurrò alcuna differenza di principio importante e semplificherò notevolmente la matematica coinvolta.

111. I due elementi matematicamente fondamentali nella geometria proiettiva sono il rapporto anarmonico e la costruzione quadrilatera.

Da questi due deriva matematicamente tutto il resto. Ora, cosa si intende, in geometria proiettiva, per rapporto anarmonico?



Se partiamo dal rapporto anarmonico come definito usualmente, ci imbattiamo nella difficoltà della sua natura quantitativa [122] . Ma tra le proprietà dedotte da questa definizione, molte, se non la maggior parte, sono puramente qualitative. La più fondamentale di queste è che, se attraverso quattro punti qualsiasi di una linea retta tracciamo quattro linee rette che si incontrano in un punto, e se poi tracciamo una nuova linea retta che incontra queste quattro, i quattro nuovi punti di intersezione hanno lo stesso rapporto anarmonico dei quattro punti da cui siamo partiti. Quindi, nella figura, *abcd* , *a'b'c'd'* , *a"b"c"d"* , hanno tutti lo stesso rapporto anarmonico. La relazione reciproca vale per il rapporto anarmonico di quattro linee rette. Qui

abbiamo, chiaramente, la base necessaria per una definizione qualitativa. La definizione deve essere la seguente:

Due insiemi di quattro punti ciascuno sono definiti come aventi lo stesso rapporto anarmonico, quando (1) ogni insieme di quattro giace su una linea retta e (2) i punti corrispondenti di insiemi diversi giacciono a due a due su quattro linee rette passanti per un unico punto, o quando entrambi gli insiemi hanno questa relazione con un qualsiasi terzo insieme [123] . E reciprocamente: Due insiemi di quattro linee rette sono definiti come aventi lo stesso rapporto anarmonico quando (1) ogni insieme di quattro passa per un unico punto e (2) le linee corrispondenti di insiemi diversi passano, a due a due, attraverso quattro punti su una linea retta, o quando entrambi gli insiemi hanno questa relazione con un qualsiasi terzo insieme.

Due insiemi di punti o di rette, che hanno lo stesso rapporto anarmonico, sono considerati equivalenti dalla geometria proiettiva: questa equivalenza qualitativa sostituisce l'uguaglianza quantitativa della geometria metrica ed è ovviamente inclusa, per definizione, nella suddetta descrizione delle trasformazioni proiettive in generale.

112. Dobbiamo ora considerare lacostruzione quadrilatera [124] . Questa ha un duplice scopo: in primo luogo, definire l'importante caso speciale noto come intervallo armonico; e in secondo luogo, fornire un metodo univoco ed esaustivo per assegnare numeri diversi a punti diversi. Quest'ultimo metodo ha, a sua volta, un duplice scopo: in primo luogo, quello di fornire una simbologia conveniente per descrivere e distinguere punti diversi, e quindi di fornire un mezzo per l'introduzione dell'analisi; e in secondo luogo, di assegnare questi numeri in modo tale che, se avessero il normale significato metrico, come distanze da un punto sulla retta numerata, darebbero –1 come rapporto anarmonico di un intervallo armonico, e che, se quattro punti hanno lo stesso rapporto anarmonico di altri quattro, così abbiano i numeri corrispondenti. Quest'ultimo scopo è dovuto a motivi puramente tecnici: evita la confusione con i nostri preconcetti che deriverebbe da qualsiasi altro valore per un intervallo armonico; Ciò ci consente, quando si desiderano interpretazioni metriche di risultati proiettivi, di effettuare tali interpretazioni senza tediose trasformazioni numeriche, e ci permette di eseguire trasformazioni proiettive mediante metodi algebrici. Allo stesso tempo, dal punto di vista strettamente proiettivo, come osservato sopra, i numeri introdotti hanno un significato puramente convenzionale; e finché non si passa alla geometria metrica, non si può dimostrare alcuna ragione per assegnare il valore -1 a un intervallo armonico. Con questo presupposto, vediamo in cosa consiste la costruzione quadrilatera.

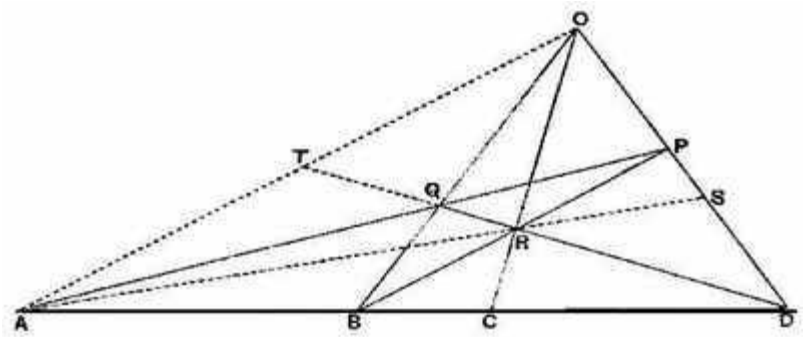


113. Un intervallo armonico, in geometria elementare, è quello il cui rapporto anarmonico è –1, ovvero quello in cui i tre segmenti formati dai quattro punti sono in progressione armonica, o ancora, quello in cui il rapporto tra i due segmenti interni è uguale al

rapporto tra i due segmenti esterni. Se*a*,*b*,*c*,*d*sono i quattro punti, si vede facilmente che queste definizioni sono equivalenti tra loro: danno rispettivamente:

$\frac{ab}{ad} / \frac{ad}{} = -1$, $\frac{1}{} - \frac{1}{} = \frac{1}{} - \frac{1}{}$, e $\frac{ab}{} = \frac{ad}{}$.*bc dc ab ac acadbc cd*

Ma poiché sono tutte quantitative, non possono essere utilizzate per il nostro scopo attuale. Né sono disponibili definizioni che implichino la bisezione di linee o angoli. Dobbiamo avere una definizione che proceda interamente per mezzo di linee rette e punti, senza misurare distanze o angoli. Ora, dalle definizioni di intervallo armonico di cui sopra, vediamo che *a* , *b* , *c* , *d* hanno lo stesso rapporto anarmonico di *c* , *b* , *a* , *d* . Questo ci fornisce la proprietà che ci serve per la nostra definizione. Infatti, dimostra che, in un intervallo armonico, possiamo trovare una trasformazione proiettiva che scambi *a* e *c* . Questa è una condizione necessaria e sufficiente per un intervallo armonico, e la costruzione quadrilatera è il metodo generale per realizzarla.



Dati tre punti qualsiasi *A* , *B* , *D* su una retta, la costruzione del quadrilatero trova il punto *C* armonico ad *A* rispetto a *B* e *D* con il seguente metodo: prendi un punto qualsiasi *O* esterno alla retta *ABD* e uniscilo a *B* e *D*. Traccia una retta qualsiasi passante per *A che intersechi OD* e *OB* in *P* e *Q*. Unisci *DQ* e *BP* e fai in modo che la loro intersezione sia in *R*. Unisci *OR* e fai in modo che *OR* incontri *ABD* in *C*. Allora *C* è il punto cercato.

Per dimostrarlo, si consideri *DRQ* che incontra *OA* in *T* e si tracci *AR* , che incontra *OD* in *S*. Quindi una trasformazione proiettiva di *A* , *B* , *C* , *D* da *R* a *OD* fornisce i punti *S* , *P* , *O* , *D* , che, proiettati da *A* su *DQ* , danno *R* , *Q* , *T* , *D*. Ma questi, a loro volta, proiettati da *O* su *ABD* , danno *C* , *B* , *A* , *D*. Pertanto *A* , *B* , *C* , *D* possono essere trasformati proiettivamente in *C* , *B* , *A* , *D* e quindi formare un intervallo armonico. Da questo punto, la dimostrazione che la costruzione è unica e generale segue semplicemente [125] .

L'introduzione dei numeri, mediante questa costruzione, non presenta difficoltà di principio, eccetto, in effetti, quelle che accompagnano sempre l'applicazione dei numeri ai continui, e può essere studiata in modo soddisfacente nel Nicht- di Klein.

Euclide (I. p. 337 ss.). Il principio è quello di assegnare i numeri 0, 1, ∞ a

A , *B* , *D* e quindi il numero 2 a *C* , affinché le differenze *AB* , *AC* , *AD* siano in progressione armonica. Prendendo *B* , *C* , *D* come una nuova terna corrispondente ad *A* , *B* , *D* , troviamo un punto armonico a *B* rispetto a *C* , *D* e gli assegniamo il numero 3, e così via. In questo modo,

possiamo ottenere un numero qualsiasi di punti, e siamo certi di non avere mai due volte lo stesso numero e lo stesso punto, cosicché le nostre coordinate hanno la proprietà essenziale di una corrispondenza univoca con i punti che denotano, e *viceversa* .

114. Il punto importante nella costruzione di cui sopra, e la ragione per cui l'ho riprodotta in dettaglio, è che essa procede interamente per mezzo dei principi generali di trasformazione enunciati sopra. Da questo punto in poi, tutto si realizza per mezzo delle due idee fondamentali che abbiamo appena discusso, e tutto, quindi, dipende dal nostro principio generale di equivalenza proiettiva. Questo principio, per quanto riguarda due dimensioni, può essere enunciato in modo più semplice che nel passo citato da Cremona. Esso parte, in due dimensioni, dalle seguenti definizioni:

Proiettare i punti *A* , *B* , *C* , *D* ... da un centro *O* significa costruire le rette *OA* , *OB* , *OC* , *OD* ....

Tagliare un certo numero di linee rette *a* , *b* , *c* , *d* ... mediante una trasversale *s* , significa costruire i punti *sa* , *sb* , *sc* , *sd* .... [126]

L'applicazione successiva di queste due operazioni, a condizione che la figura originale fosse costituita da punti su una retta o da rette passanti per un punto, produce una figura proiettivamente indistinguibile dalla figura precedente; e quindi, per estensione, se un qualsiasi punto giacente su una retta nella figura originale giace su una retta nella figura derivata, e viceversa per le rette passanti per i punti, le due operazioni hanno prodotto figure proiettivamente simili. Questo principio generale può essere considerato composto da due parti, a seconda dell'ordine delle operazioni: se iniziamo con la proiezione e terminiamo con la sezione, trasformiamo una figura di punti in un'altra figura di punti; con l'ordine inverso, trasformiamo una figura di rette in un'altra figura di rette.

115. Prima di poter chiarire il significato del nostro principio, dobbiamo avere un'idea di cosa intendiamo per punti e linee rette. Ma questa definizione, nella geometria proiettiva, non può essere data senza una discussione sul principio di dualità, la forma matematica del cerchio filosofico implicato nelle definizioni geometriche.

Limitandoci per il momento a due dimensioni, il principio afferma, in linea di massima, che qualsiasi teorema che tratti di rette passanti per un punto e di punti su una retta rimane valido se questi due termini, ovunque compaiano, vengono scambiati. Quindi: due punti giacciono su una retta che determinano completamente; e due rette si incontrano in un punto, che determinano completamente. I quattro punti di intersezione di una trasversale con quattro rette passanti per un punto hanno un rapporto anarmonico indipendente dalla trasversale in questione; e le quattro rette che uniscono quattro punti su una retta a un quinto punto hanno un rapporto anarmonico indipendente da quel quinto punto. Così anche il nostro principio generale di trasformazione proiettiva ha due aspetti: uno in cui i punti si muovono lungo rette fisse e uno in cui le rette ruotano attorno a punti fissi.

Questa dualità suggerisce che qualsiasi definizione di punti debba essere effettuata per mezzo della retta, e qualsiasi definizione della retta debba essere effettuata per mezzo di

punti. Quando prendiamo in considerazione la terza dimensione, è vero, la dualità non è più così semplice; dobbiamo ora considerare anche il piano, ma questo introduce solo un cerchio di tre termini, che è a malapena preferibile a un cerchio di due termini. Ora diciamo: tre punti, o una retta e un punto, determinano un piano; ma viceversa, tre piani, o una retta e un piano, determinano un punto. Possiamo considerare la retta come una relazione tra due dei suoi punti, ma possiamo anche considerare il punto come una relazione tra due rette passanti per essa. Possiamo considerare il piano come una relazione tra tre punti, o tra un punto e una retta, ma possiamo anche considerare il punto come una relazione tra tre piani, o tra una retta e un piano, che si intersecano in esso.

116. Come possiamo uscire da questo cerchio? Il fatto è che, nella geometria pura, non possiamo uscirne. Infatti, come vedremo più ampiamente in seguito, lo spazio non è altro che relazioni; se, pertanto, prendiamo una qualsiasi figura spaziale e cerchiamo i termini tra i quali essa è in relazione, siamo costretti, in geometria, a cercare questi termini all'interno dello spazio, poiché non abbiamo altro luogo in cui cercarli, ma siamo condannati, poiché tutto ciò che è puramente spaziale è una mera relazione, a vedere i nostri termini dissolversi non appena li afferriamo.

Pertanto, la relatività dello spazio, pur essendo l'essenza del principio di dualità, rende al contempo impossibile l'espressione di tale principio, o di qualsiasi altro principio di geometria pura, in modo che sia esente da contraddizioni. Tuttavia, se vogliamo progredire nella nostra analisi del ragionamento geometrico e nelle nostre definizioni di linee e punti, dobbiamo per un certo periodo ignorare questa contraddizione; dobbiamo argomentare come se non esistesse, in modo da liberare la nostra scienza da qualsiasi contraddizione non inevitabile.

117. In conformità con questa procedura, definiamo dunque i nostri punti come i termini delle relazioni spaziali, considerando tutto ciò che non è un punto come una relazione tra punti. Che cosa devono essere considerati i nostri punti in quest'ottica? Ovviamente, se l'estensione è mera relatività, essi devono essere considerati privi di estensione; ma se devono fornire i termini per le relazioni spaziali,*ad esempio*per le linee rette, queste relazioni devono presentarli come i termini delle figure che rappresentano. In altre parole, poiché ciò che può essere realmente considerato, senza contraddizione, come il termine di una relazione spaziale, non è esteso, dobbiamo considerare, come termine da usare in geometria, dove non possiamo andare fuori dallo spazio, la cosa più spaziale di cui la geometria può occuparsi, la cosa che, pur essendo*nello*spazio,*contiene*spazio; e questa cosa definiamo come ilpunto[127].

Trascurando, dunque, la contraddizione fondamentale in questa definizione, il resto delle nostre definizioni ne consegue senza difficoltà. La retta è la relazione tra due punti, e il piano è la relazione tra tre. Queste definizioni saranno argomentate e difese a lungo nella sezione B di questo documento.

Capitolo [128] , dove possiamo discutere allo stesso tempo le definizioni metriche alternative; per il nostro scopo attuale, è sufficiente osservare che la geometria proiettiva, fin dall'inizio, considera la retta determinata da due punti e il piano determinato da tre, da cui segue, se prendiamo i punti come possibili termini per le relazioni spaziali, che la retta e il piano possono essere considerati relazioni tra due e tre punti rispettivamente. Se concordiamo su queste definizioni, possiamo procedere a discutere il principio fondamentale della geometria proiettiva e ad analizzare gli assiomi implicati nella sua verità.

118. La geometria proiettiva, come abbiamo visto, non si occupa di quantità e quindi non riconosce alcuna differenza laddove la differenza sia puramente quantitativa. Ora, il confronto quantitativo dipende da un'identità di qualità riconosciuta; il riconoscimento dell'identità qualitativa, pertanto, è logicamente precedente alla quantità ed è presupposto da ogni giudizio di quantità. Quindi tutte le figure le cui differenze possono essere descritte in modo esaustivo dalla quantità, *cio*èdalla pura misurazione, devono avere un'identità di qualità, e questa deve essere riconoscibile senza ricorrere alla quantità. Ne consegue che, definendo il termine qualità in ambito geometrico, scopriremo quali insiemi di figure sono indiscernibili proiettivamente. Se la nostra definizione è corretta, dovrebbe portare al principio proiettivo generale con cui ci siamo prefissati.

119. Abbiamo convenuto di considerare i punti come termini di relazioni spaziali e abbiamo concordato che si potessero distinguere punti diversi. Tuttavia, abbiamo rimandato la discussione sulle condizioni in cui tale distinzione potesse essere effettuata. Questa discussione ci fornirà la definizione di qualità e la dimostrazione del nostro principio proiettivo generale.

Innanzitutto, i punti sono stati definiti come nient'altro che termini per le relazioni spaziali. Non possiedono, pertanto, proprietà intrinseche, ma si distinguono unicamente per mezzo delle loro relazioni. Ora, la relazione tra due punti, abbiamo detto, è la retta su cui giacciono. Ciò garantisce quell'identità di qualità per tutte le coppie di punti sulla stessa retta, che è richiesta sia dal nostro principio proiettivo sia dalla geometria metrica. (Infatti, solo dove c'è identità di qualità la quantità può essere applicata correttamente.) Se sono dati solo due punti, questi non possono essere distinti, senza l'uso della quantità, da qualsiasi altra coppia di punti sulla stessa retta; infatti, la relazione qualitativa tra due punti qualsiasi è la stessa che per la coppia originale, e solo mediante una differenza di relazione i punti possono essere distinti l'uno dall'altro.

Ma, viceversa, una retta non è altro che la relazione tra due dei suoi punti, e tutti i punti sono qualitativamente simili. Pertanto, non può esserci nulla che distingua una retta da un'altra se non i punti per cui passa, e questi si distinguono dagli altri punti solo per il fatto che la retta li attraversa. Otteniamo così la trasformazione reciproca: se ci viene dato un solo punto, qualsiasi coppia di rette passanti per quel punto è qualitativamente indistinguibile da qualsiasi altra. Questo, da un lato, costituisce la base della seconda parte del nostro principio proiettivo generale, e dall'altro la condizione per applicare la quantità, nella misurazione degli angoli, alla distanza di due rette incidenti.

120. Possiamo ora comprendere la ragione di quello che finora poteva sembrare un fatto alquanto arbitrario, ovvero la necessità di *quattro* punti collineari per un rapporto anarmonico. Riprendendo la costruzione quadrilatera e la conseguente introduzione del numero, vediamo che il rapporto anarmonico è una relazione proiettiva intrinseca di quattro punti collineari o rette concorrenti, tale che, dati tre termini e la relazione, il quarto termine può essere determinato univocamente mediante metodi proiettivi. Consideriamo ora una coppia di punti. Poiché tutte le rette sono proiettivamente equivalenti, la relazione tra una coppia di punti è precisamente equivalente a quella tra un'altra coppia. Dato un solo punto, quindi, non è possibile assegnare alcuna relazione proiettiva, a un secondo punto, che limiti in alcun modo la nostra scelta del secondo punto. Dati due punti, tuttavia, esiste una tale relazione: il terzo punto può essere dato collineare ai primi due. Ciò limita la sua posizione a una retta, ma poiché due punti determinano solo una retta, il terzo punto non può essere ulteriormente limitato. Si comprende quindi perché non si possa trovare alcuna relazione proiettiva intrinseca tra tre punti, che ci permetta, a partire da due, di determinare univocamente il terzo. Tuttavia, con tre punti collineari dati, disponiamo di qualcosa di più di una semplice linea retta, e la costruzione quadrilatera ci permette di determinare univocamente un numero qualsiasi di nuovi punti collineari. Ciò dimostra perché il rapporto anarmonico debba essere una relazione tra quattro punti, piuttosto che tra tre.

121. Possiamo ora dimostrare, credo, che due figure, che sono in relazione proiettiva, sono qualitativamente simili. Iniziamo con un insieme di punti su una retta. Finché questi vengono considerati senza riferimento ad altri punti o figure, sono tutti qualitativamente simili. Possono essere distinti per intuizione immediata, ma quando cerchiamo, senza considerare la quantità, di distinguerli concettualmente, troviamo il compito impossibile, poiché l'unica relazione qualitativa tra due qualsiasi di essi, la retta, è la stessa per qualsiasi altra coppia. Ma ora scegliamo, a caso, un punto esterno alla retta. I punti della nostra retta acquisiscono ora nuovi aggettivi, vale a dire le loro relazioni con il nuovo punto, *cioè* le rette che li uniscono a questo nuovo punto. Ma queste rette, reciprocamente, definiscono soltanto il nostro punto esterno, e tutte le rette sono qualitativamente simili. Se prendiamo quindi un altro punto esterno e lo uniamo agli stessi punti della nostra retta originale, otteniamo una figura in cui, finché si esclude la quantità, non vi è alcuna differenza concettuale rispetto alla figura precedente. L'intuizione immediata può distinguere le due figure, ma la discriminazione qualitativa non può farlo. Pertanto, otteniamo una trasformazione proiettiva di quattro linee in altre quattro linee, come se producesse una figura qualitativamente indistinguibile dalla figura originale. Un ragionamento simile si applica alle altre trasformazioni proiettive. Quindi, l'unica ragione, nell'ambito della geometria proiettiva, per non considerare le figure proiettive come effettivamente identiche, è la percezione intuitiva della differenza di posizione. Questa è fondamentale e deve essere accettata come un *dato*. È presupposta nella distinzione dei vari punti e costituisce l'essenza stessa della geometria. È, di fatto, l'essenza della nozione di una forma di esteriorità, nozione che costituisce la materia di studio della geometria proiettiva.

122. Possiamo ora riassumere i risultati della nostra analisi della geometria proiettiva ed enunciare gli assiomi su cui si basa il suo ragionamento. Dovremo poi dimostrare che questi assiomi sono necessari a qualsiasi forma di esternalità, con la quale passeremo, dalla mera analisi, a un argomento trascendentale.

Gli assiomi che sono stati assunti nell'analisi precedente, e che, a quanto pare, sono sufficienti a fondare la geometria proiettiva, possono essere approssimativamente riassunti come segue:

I. Possiamo distinguere diverse parti dello spazio, ma tutte le parti sono qualitativamente simili e si distinguono solo per il fatto immediato che si trovano l'una all'esterno dell'altra.

II. Lo spazio è continuo e infinitamente divisibile; il risultato della divisione infinita, lo zero dell'estensione, è chiamato *punto* [129] .

III. Due punti qualsiasi determinano una figura unica, chiamata linea retta; tre punti qualsiasi in generale determinano una figura unica, il piano. Quattro punti qualsiasi determinano una figura corrispondente di tre dimensioni e, per quanto possa sembrare il contrario, lo stesso può valere per un numero qualsiasi di punti. Ma questo processo giunge al termine, prima o poi, con un certo numero di punti che determinano l'intero spazio. Perché se così non fosse, nessun numero di relazioni di un punto con una collezione di punti dati potrebbe mai determinare la sua relazione con nuovi punti, e la geometria diventerebbe impossibile [130] .

Questa formulazione degli assiomi non intende avere una precisione esclusiva: altre formulazioni altrettanto valide potrebbero essere facilmente fatte. Infatti, come vedremo in seguito, tutti questi assiomi sono filosoficamente interdipendenti e possono, pertanto, essere enunciati in molti modi. La formulazione di cui sopra, tuttavia, include, se non erro, tutto ciò che è essenziale per la geometria proiettiva e tutto ciò che è necessario per dimostrare il principio di trasformazione proiettiva. Prima di discutere l'apriorità di questi assiomi, riepiloghiamo brevemente gli scopi che essi si prefiggono di raggiungere.

123. Dal punto di vista esclusivamente matematico, come abbiamo visto, la geometria proiettiva discute soltanto quali figure possono essere ottenute l'una dall'altra mediante trasformazioni proiettive,*cioè*mediante le operazioni di proiezione e sezione. Queste operazioni, in tutte le loro forme, presuppongono il punto, la retta eil piano [131] , la cui necessità per la geometria proiettiva, dal punto di vista puramente matematico, è dunque evidente fin dall'inizio. Ma filosoficamente, la geometria proiettiva ha, come abbiamo visto, uno scopo più ampio. Questo scopo più ampio, che conferisce, all'indagine delle figure proiettivamente equivalenti, la sua principale importanza, consiste nella determinazione della somiglianza spaziale qualitativa, nella determinazione, cioè, di tutte le figure che, data una figura qualsiasi, possono essere distinte dalla figura data, purché la quantità sia esclusa, solo per il semplice fatto che sono esterne ad essa.

124. Ora, considerando ciò che implica una tale equivalenza qualitativa assoluta, troviamo subito, come suo prerequisito più ovvio, la perfetta omogeneità dello spazio. Si

assume infatti che una figura possa essere completamente definita dalle sue relazioni interne e che le relazioni esterne, che ne costituiscono la posizione, pur essendo sufficienti a distinguerla da altre figure, non influenzino in alcun modo le sue proprietà interne, che sono considerate qualitativamente identiche a quelle di figure con relazioni esterne completamente diverse. Se così non fosse, qualsiasi analogia con la trasformazione proiettiva sarebbe impossibile. Infatti, tale trasformazione altera sempre la posizione,*cioè*le relazioni esterne, di una figura e non potrebbe, pertanto, se le figure dipendessero dalle loro relazioni con altre figure o con lo spazio vuoto, essere studiata senza riferimento ad altre figure o alla posizione assoluta della figura originaria. Per il nostro principio, in breve, richiediamo quella che si potrebbe definire la passività reciproca e l'indipendenza reciproca di due parti o figure dello spazio.

Questa passività e questa indipendenza implicano l'omogeneità dello spazio, o il suo equivalente, la relatività della posizione. Infatti, se le proprietà interne di una figura sono le stesse, qualunque siano le sue relazioni esterne, ne consegue che tutte le parti dello spazio sono qualitativamente simili, poiché un cambiamento di relazione esterna è un cambiamento nella parte di spazio occupata. Ne consegue anche che ogni posizione è relativa ed estrinseca, *vale a dire* che la posizione di un punto, o la parte di spazio occupata da una figura, non è, e non ha alcun effetto su, alcuna proprietà intrinseca del punto o della figura, ma è esclusivamente una relazione con altri punti o figure nello spazio, e rimane senza effetto se non quando tali relazioni vengono considerate.

125. L'omogeneità dello spazio e la relatività della posizionesono dunquepresupposte nel confronto spaziale qualitativo di cui si occupa la geometria proiettiva. Quest'ultima, come abbiamo visto, è anche alla base del principio di dualità. Ma queste proprietà, come cercherò ora di dimostrare, appartengono necessariamente a qualsiasi forma di esternalità e sono quindi*a priori*di tutti gli spazi possibili. Per dimostrarlo, tuttavia, dobbiamo prima definire la nozione di forma di esternalità in generale.

Osserviamo innanzitutto che la distinzione tra geometrie euclidee e non euclidee, così importante nelle indagini metriche, scompare nella geometria proiettiva propriamente detta. Ciò suggerisce che la geometria proiettiva, sebbene originariamente concepita come scienza dello spazio euclideo e successivamente anche degli spazi non euclidei, si occupi in realtà di una concezione più ampia, una concezione che include entrambe e trascura gli attributi in cui differiscono. Di questa concezione parlerò come di una forma di esternalità.

126. Nella sua profonda introduzione filosofica alla sua*Ausdehnungslehre* del 1844, Grassmann suggerì che la geometria, sebbene impropriamente considerata pura, fosse in realtà una branca della matematica applicata, poiché si occupava di una materia non creata, come il numero, dall'intelletto, ma ad esso data, e quindi non interamente soggetta alle sue sole leggi. Ma doveva essere possibile – sosteneva – costruire una branca della matematica pura, una scienza, cioè, in cui il nostro oggetto fosse interamente una creazione dell'intelletto, che tuttavia si occupasse, come fa la geometria, dell'estensione – estensione però come concepita, non come percepita empiricamente nella sensazione o nell'intuizione.

Da questo punto di vista, la controversia tra kantiani e antikantiani diventa del tutto irrilevante, poiché la distinzione tra matematica pura e matematica mista non risiede nella distinzione tra soggettivo e oggettivo, ma tra il puramente intellettuale da un lato e tutto il resto dall'altro. Ora, Kant aveva sostenuto, con grande enfasi, che lo spazio non fosse una costruzione intellettuale, ma un'intuizione soggettiva. La geometria, quindi, con la distinzione di Grassmann, appartiene alla matematica mista tanto secondo Kant quanto secondo i suoi oppositori. E la distinzione di Grassmann, sostengo, è la più importante per l'epistemologia, e quella da adottare per distinguere l' *à priori* dall'empirico. Infatti, ciò che è meramente intuitivo può cambiare, senza sconvolgere le leggi del pensiero, senza rendere la conoscenza formalmente impossibile: ma ciò che è puramente intellettuale non può cambiare, a meno che non cambino le leggi del pensiero e tutta la nostra conoscenza crolli simultaneamente. Seguirò quindi la distinzione di Grassmann nella costruzione di una forma di esteriorità *à priori e puramente concettuale*.

127. La pura dottrina dell'estensione, così come costruita da Grassmann, non necessita di discussione: essa includeva molto materiale empirico ed era filosoficamente un fallimento. Ma i suoi principi, credo, ci permetteranno di dimostrare che la geometria proiettiva, interpretata in modo astratto, è la scienza che egli aveva previsto e si occupa di una materia che può essere costruita dal solo intelletto puro. Se così fosse, tuttavia, bisogna osservare che la geometria proiettiva, per il momento, è resa puramenteipotetica [132] . Ogni verità necessaria, come ha dimostrato Bradley, èipotetica [133] e afferma,*a prima vista*, solo il fondamento su cui poggia la necessaria connessione tra premesse e conclusione. Se costruiamo una mera concezione dell'esteriorità, e quindi abbandoniamo il nostro spazio effettivamente dato, il risultato della nostra costruzione, finché non ritorniamo a qualcosa di effettivamente dato, rimane privo di significato esistenziale: se esiste*un'esteriorità*esperita, afferma, allora deve esistere una forma di esteriorità con tali e tali proprietà. Il primo argomento di Kant sullo spazio dimostra, a mio avviso, a coloro che ammettono l'esistenza di un mondo fatto di cose diverse ma interconnesse, che deve necessariamente esistere un'esteriorità esperienziale. Ma questa è una questione che affronteremo nel prossimo capitolo.

Ciò che dobbiamo fare qui non è discutere se esista una forma di esternalità, ma se, qualora tale forma esista, essa debba possedere le proprietà incarnate negli assiomi della geometria proiettiva. Ora, innanzitutto, cosa intendiamo per tale forma?

128. In ogni mondo in cui la percezione ci presentacose varie, concontenuti discriminati e differenziati, deve esserci, nella percezione, almeno un “principio didifferenziazione [134] ”, un elemento, cioè, mediante il quale le cose presentate vengono distinte come varie. Questo elemento, preso isolatamente e astratto dal contenuto che differenzia, possiamo chiamarlo una forma di esternalità. Che esso, preso isolatamente, debba apparire come una forma, e non come una mera diversità di contenuto materiale, è, credo, abbastanza ovvio. Infatti, una diversità di contenuto materiale non può essere studiata a parte quel contenuto materiale; ciò che vogliamo studiare qui, al contrario, è la mera

possibilità di tale diversità, che costituisce il residuo, come cercherò di dimostrarein seguito[135], quando astraiamo da qualsiasi percezione sensoriale tutto ciò che è distintivo della sua materia particolare. Questa possibilità, dunque, questo principio di mera diversità, è la nostra forma di esternalità. Quanto sia necessario assumere una tale forma, distinta dalle cose interrelate, lo considererò più avanti[136]. Per ora, poiché lo spazio, come trattato dalla geometria, è certamente una forma di questo tipo, dobbiamo solo chiederci: quali proprietà deve necessariamente possedere una tale forma, quando studiata in astratto?

129. In primo luogo, l'esteriorità è una concezione essenzialmente relativa: nulla può essere esterno a se stesso. Essere esterno a qualcosa significa essere un altro con una qualche relazione con quella cosa. Pertanto, quando astraiamo una forma di esteriorità da ogni contenuto materiale e la studiamo in isolamento, la posizione apparirà, necessariamente, come puramente relativa: una posizione non può avere alcuna qualità intrinseca, poiché la nostra forma consiste di pura esteriorità, e l'esteriorità non contiene ombra o traccia di una qualità intrinseca. Otteniamo così il nostro postulato fondamentale, la relatività della posizione, o, come potremmo dire, la completa assenza, da parte della nostra forma, di qualsiasi traccia di cosità.

Lo stesso argomento può essere espresso anche nel modo seguente: se astraiamo il concetto di esteriorità e cerchiamo di trattarlo *in sé* , è evidente che dobbiamo ottenere un oggetto privo sia di elementi che di totalità. Infatti, ci siamo astratti dalla materia eterogenea che riempiva la nostra forma, mentre qualsiasi elemento, o qualsiasi intero, conserverebbe alcune delle qualità di una materia. Un elemento o un intero, infatti, dovrebbero essere qualcosa di non esterno a se stessi, e quindi conterrebbero qualcosa che non è pura esteriorità. Da qui nascono l'infinita divisibilità, con la nozione autocontraddittoria di punto, nella ricerca di elementi, e l'estensione illimitata, con la contraddizione di un regresso infinito o di un circolo vizioso, nella ricerca di un intero completo. Quindi, ancora una volta, la nostra forma non contiene né elementi né totalità, ma solo infinite relazioni: i termini di queste relazioni sono esclusi dalla nostra astrazione dalla materia che riempie la nostra forma.

130. Allo stesso modo possiamo dedurre l'omogeneità della nostra forma. La diversità di contenuto, che era possibile solo all'interno della forma dell'esteriorità, è stata astratta, lasciando solo la mera possibilità di diversità, il mero principio di differenziazione, di per sé uniforme e indifferenziato. Infatti, se la diversità presuppone una tale forma, la forma non può, a meno che non sia contenutain unanuova forma, essere essa stessa diversa o differenziata.

Oppure possiamo dedurre la stessa proprietà dalla relatività di posizione. Infatti, qualsiasi qualità di una posizione, che la distinguesse da un'altra, sarebbe necessariamente più o meno intrinseca e contraddirebbe la relatività pura. Pertanto, tutte le posizioni sono qualitativamente simili, *ovvero* la forma è omogenea in tutto lo spazio.

131. Da quanto detto sull'omogeneità e sulla relatività, segue una delle proprietà più strane di una forma di esternalità. Questa proprietà è che la relazione di esternalità tra due

cose qualsiasi è infinitamente divisibile e può essere considerata, di conseguenza, come composta da un numero infinito di elementi che sarebbero della nostra forma, o ancora come la somma di due relazioni diesternalità [137] . Parlare di dividere o aggiungere relazioni può sembrare assurdo, anzi rivela l'inopportunità della parola relazione in questo contesto. È difficile, tuttavia, trovare un'espressione che sia meno impropria. Il fatto sembra essere che l'esternalità non sia tanto una relazione quanto la mera relatività, o la mera possibilità di una relazione. Su questo argomento mi soffermerò nel Capitolo$_{IV.}$ [138] A questo punto è importante rendersi conto, come presupporrà l'argomentazione successiva, che la relazione – se così possiamo chiamarla – di esternalità tra due o più cose deve, poiché la nostra forma è omogenea, essere suscettibile di continua alterazione, e deve, poiché la nostra forma infinitamente divisibile è costituita da tali relazioni, essere suscettibile di infinita divisione. Ma il risultato dell'infinita divisione è definito come l'elemento della nostra forma. (La nostra forma non ha elementi, ma dobbiamo immaginare elementi per poter ragionare su di essa, come verrà mostrato più ampiamente nel CapitoloIV.) Ne consegue che ogni relazione di esternalità può essere considerata, a fini scientifici, come un insieme infinito di elementi, sebbene filosoficamente siano valide solo le relazioni, e gli elementi siano un risultato autocontraddittorio dell'ipostatizzazione della forma di esternalità. Questo modo di considerare le relazioni di esternalità è importante per comprendere il significato di idee come tre o quattro punti collineari.

Poiché questo punto è difficile e importante, ripeterò, in modo un po' più dettagliato, la spiegazione del modo in cui le linee rette e i piani vengono considerati come conger di punti. Dal punto di vista strettamente proiettivo, sebbene tutte le altre figure *siano* semplicemente una collezione di un numero qualsiasi di punti, linee o piani richiesti, dati da una qualche costruzione proiettiva, le linee rette e i piani stessi sono dati integralmente e non devono essere considerati divisibili o composti da parti. Dire che un punto giace su una linea retta significa, per la geometria proiettiva propriamente detta, che la linea retta è una relazione tra questo e un altro punto. Qui i punti in questione, se la nostra affermazione deve essere libera da contraddizioni, devono essere considerati, se posso usare tale espressione, come punti *reali , cioè* come centri materiali non estesi [139] . Le linee rette e i piani sono quindi relazioni tra questi atomi materiali. Sono relazioni, tuttavia, che possono subire un'alterazione metrica pur rimanendo proiettivamente invariate. Quando la relazione proiettiva tra i due punti *A* , *B* è la stessa di quella tra i due punti *A* , *C* , mentre la relazione metrica (distanza) è diversa, si dice che i tre punti *A* , *B* , *C* sono collineari. Ora, il modo metrico di considerare le figure spaziali richiede che esse siano ipostatizzate e non più considerate come semplici relazioni. Infatti, quando consideriamo una quantità come estensiva, *cioè* divisibile in parti, la consideriamo necessariamente come qualcosa di più di una semplice relazione o aggettivo, poiché nessuna semplice relazione o aggettivo può essere diviso. Per un trattamento quantitativo, quindi, le relazioni spaziali devono essere ipostatizzate [140] . Quando ciò viene fatto, otteniamo, come abbiamo visto sopra, una forma di esternalità omogenea e infinitamente divisibile. Troviamo ora che la distanza, ad esempio, può essere continuamente modificata senza cambiare la retta su cui viene misurata. Otteniamo così, sulla retta in

questione, una serie continua di punti che, poiché è continua, consideriamo come costituente la nostra retta. È dunque unicamente dall'ipostatizzazione delle relazioni, richiesta dalla geometria metrica, che scaturisce la concezione di rette e piani come *composti* da punti, ed è da questa ipostatizzazione che derivano le difficoltà della geometria metrica.

132. Il passo successivo, nella definizione di una forma di esternalità, si ottiene dall'idea di*dimensioni*. Le posizioni, come abbiamo visto, sono definite unicamente dalle loro relazioni con altre posizioni. Ma affinché tale definizione sia possibile, deve bastare un numero finito di relazioni, poiché i numeri infiniti sono filosoficamente inammissibili. Una posizione deve quindi essere definibile, se si vuole che la conoscenza della nostra forma sia possibile, mediante un numero finito e intero di relazioni con altre posizioni. Ogni relazione così necessaria per la definizione la chiamiamo dimensione. Da qui otteniamo la proposizione:*qualsiasi forma di esternalità deve avere un numero finito e intero di dimensioni*.

133. Si potrebbe obiettare che l'argomentazione di cui sopra abbia trascurato unapossibilità. Si è avvalso di un argomento trascendentale, si potrebbe sostenere, senza tuttavia dimostrare sufficientemente che la conoscenza dell'esteriorità debba essere possibile senza fare riferimento alle materie esterne l'una all'altra. La definizione di una posizione può risultare impossibile, finché trascuriamo la materia che riempie la forma, ma può diventare possibile quando questa materia viene presa in considerazione. Tale obiezione, a mio avviso, può essere efficacemente contrastata facendo riferimento alla passività e all'omogeneità della nostra forma. Infatti, qualsiasi dipendenza della definizione di una posizione dalla materia particolare che riempie quella posizione implicherebbe una qualche forma di interazione tra la materia e la sua posizione, un qualche effetto del contenuto eterogeneo sulla forma omogenea. Ma poiché la forma è totalmente priva di sostanza, perfettamente impassibile e completamente priva di differenze tra le sue parti, un tale effetto è inconcepibile. Un effetto su una posizione dovrebbe modificarla in qualche modo, ma come potrebbe essere modificata? Non possiede altre qualità se non quelle che la rendono la posizione che è, in contrapposizione ad altre posizioni; non può quindi cambiare senza trasformarsi in una posizione diversa. Ma un tale cambiamento contraddice la legge di identità. Pertanto, non è la posizione ad essere cambiata, ma il contenuto ad essersi mosso nella forma. Di conseguenza, se è possibile acquisire la conoscenza della nostra forma, tale conoscenza deve essere ottenuta in modo logicamente indipendente dalla materia particolare che la riempie. L'argomentazione di cui sopra, quindi, ammettendo la possibilità di conoscenza nel campo in questione, dimostra la necessità di un numero finito e intero di dimensioni.

134. Ripetiamo il nostro argomento originale alla luce di questochiarimento.Una posizione è completamente definita quando, e solo quando, sono note sufficienti relazioni da consentirci di determinarne la relazione con qualsiasi nuova posizione nota. Solo mediante relazioni all'interno della forma di esternalità, come abbiamo appena visto, e mai mediante relazioni che implicano un riferimento alla materia particolare che riempie la forma, è

possibile effettuare una tale definizione. Ma la possibilità di una tale definizione deriva dalla Legge del Terzo Escluso, quando questa legge viene interpretata nel senso, come la interpreta Bosanquet, che "La realtà... è un sistema diparti reciprocamente determinate [141] ". Infatti, ciò implica che, date le relazioni di una parte*A*con altre parti*B*,*C* ..., una sufficiente ricchezza di tali relazioni getta luce sulle relazioni di*B*con*C*, ecc. Se non fosse così, non si potrebbe dire che le parti*A*, *B*,*C*... formano un tale sistema; In un sistema del genere, definire*A*significa definire, allo stesso tempo, tutti gli altri membri, e attribuire un aggettivo ad*A*significa attribuire un aggettivo anche a*B*e*C*.Ma le relazioni tra le posizioni, quando ripristiniamo la materia da cui le posizioni sono state astratte, sono relazioni tra le cose che occupano quelle posizioni, e queste relazioni, come abbiamo visto, possono essere studiate senza riferimento alla natura particolare, sotto altri aspetti, delle cose correlate. Ne consegue che, quando applichiamo il principio generale di unità sistematica a queste relazioni in particolare, scopriamo che queste relazioni sono interdipendenti, poiché non dipendono, per la loro definizione, da nient'altro. Questo fornisce l'assioma delle dimensioni, nella forma generale sopra descritta, come risultato, al nostro livello geometrico astratto, della relatività delle posizioni e della legge del terzo escluso.

135. Prima di procedere oltre, è necessario discutere l'importante caso particolare in cui una forma di esternalità ha una sola dimensione. Delle due forme di questo tipo, presenti nell'esperienza, una, ovvero il tempo, ne costituisce un esempio. Ma si può dimostrare, credo, che la funzione, ovvero quella di costituire la possibilità dell'esperienza, che richiediamo a tali forme, non potrebbe essere assolta da una forma unidimensionale soltanto.

In una forma unidimensionale, infatti , i vari contenuti possono essere disposti in una serie e non possono, senza interpenetrazione, cambiare l'ordine dei contenuti nella serie. Ma l'interpenetrazione è impossibile, poiché una forma di esteriorità è la mera espressione della diversità tra le cose, da cui consegue che le cose non possono occupare la stessa posizione in una forma, a meno che non esista un'altra forma che le differenzi. Infatti, senza esteriorità, non c'è diversità [142] . Così due corpi possono occupare lo stesso spazio, ma solo in momenti diversi: due cose possono esistere simultaneamente, ma solo in luoghi diversi. Una forma unidimensionale, quindi, non potrebbe, di per sé, consentire quel cambiamento delle relazioni di esteriorità, mediante il quale soltanto un mondo variegato di cose interrelate può essere portato alla coscienza. In uno spazio unidimensionale, ad esempio, si potrebbe percepire solo un singolo oggetto, che deve apparire come un punto, o al massimo due oggetti, uno davanti e uno dietro. Pertanto, due o più dimensioni sembrano una condizione essenziale per qualsiasi cosa degna di essere chiamata esperienza di cose interrelate.

136. Si potrebbe obiettare, a questo argomento, che la sua validità dipende dal presupposto che il cambiamento di una relazione di esternalità debba essere continuo. Sia formulare che confutare questa obiezione,in unmodo che non implichi il tempo, sembra quasi impossibile. Infatti non possiamo parlare di cambiamento, sia esso continuo o discreto, senza immaginare il tempo. Ammettiamo dunque che il tempo sia noto e discutiamo se il cambiamento temporale, in qualsiasi altra forma di esternalità, sia necessariamentecontinuo

[143] . Dobbiamo rispondere, credo, che la continuità è necessaria. Il cambiamento di relazione, nella nostra forma non temporale, può essere tranquillamente descritto come movimento, e la legge di causalità – poiché abbiamo già presupposto il tempo – può essere applicata a questo movimento. Ne consegue che un movimento discreto implicherebbe un effetto finito da una causa infinitesimale, poiché una causa che agisce solo per un istante di tempo sarebbe infinitesimale. Ciò implica anche una validità nel punto temporale, mentre ciò che è valido in qualsiasi forma di esternalità non è, come abbiamo già visto, l'elemento infinitesimale e autocontraddittorio risultante dalla divisione infinita, bensì la relazione finita che la matematica analizza in elementi che si annullano. Pertanto, il cambiamento deve essere continuo e la possibilità di una disposizione seriale è valida.

In una forma unidimensionale diversa dal tempo, lo stesso ragionamento deve valere. Perché qualcosa di analogo alla causalità sarebbe necessario per fare esperienza, e la relatività della forma sarebbe comunque necessariamente valida.

Pertanto, poiché sono state assunte solo queste due proprietà del tempo, l'affermazione di cui sopra rimarrebbe valida per qualsiasi seconda forma le cui relazioni fossero correlate a quelle della prima, come richiederebbe l'analogo della causalità.

137. Il passo successivo dell'argomentazione, che presuppone due o più dimensioni, riguarda gli analoghi generali di linee rette e piani,*ovvero*le figure – che possono essere considerate sia come relazioni tra posizioni sia come serie di posizioni – determinate univocamente da due o da tre posizioni. Se questo passo può essere compiuto con successo, la nostra deduzione degli assiomi proiettivi di cui sopra sarà completa e la geometria descrittiva sarà stabilita come dottrina astratta *a priori* delle forme di esternalità.

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo la natura delle relazioni che definiscono le posizioni. Abbiamo già visto che la nostra forma è puramente relazionale e infinitamente divisibile, e che le posizioni (punti) sono il risultato contraddittorio della ricerca di qualcosa di diverso dalle relazioni. Ciò che intendiamo realmente, quindi, per relazioni che definiscono una posizione, quando annulliamo la nostra precedente astrazione, sono le relazioni di esternalità mediante le quali una cosa è in relazione con altre cose. Ma come devono apparire tali relazioni, rimanendo nella forma astratta?

138. Dobbiamo dimostrare che due posizioni devono avere una relazione indipendente da qualsiasi riferimento ad altre posizioni. Per dimostrarlo, torniamo a quanto detto, in relazione alle dimensioni, riguardo alla passività e all'omogeneità della nostra forma. Poiché le posizioni sono definite solo dalle relazioni, devono esistere relazioni, all'interno della forma, tra le posizioni. Ma se esistono tali relazioni, deve esistere una relazione intrinseca a due posizioni. Supporre il contrario significa attribuire un'interazione o una connessione causale di qualche tipo tra quelle due posizioni e altre posizioni: un'ipotesi che la perfetta omogeneità della nostra forma rende assurda, poiché tutte le posizioni sono qualitativamente simili e non possono essere modificate senza perdere la loro identità. Possiamo formulare questo argomento in questo modo: poiché le posizioni sono definite solo

dalle loro relazioni, tale definizione non potrebbe mai iniziare se non con una relazione tra sole due posizioni. Supponiamo infatti che siano necessarie tre posizioni*A*,*B*,*C*, e che queste diano origine alla relazione*abc*tra le tre. In tal caso non rimarrebbe alcun mezzo per definire le diverse coppie*BC*,*CA*, *AB*, poiché l'unica relazione che le definisce sarebbe una comune a tutte e tre le coppie. Nulla si otterrebbe, in questo caso, facendo riferimento a nuovi punti, poiché dall'omogeneità e dalla passività della forma consegue che questi nuovi punti non potrebbero influenzare le relazioni interne della nostra triade, le quali, se possono dare una certa definitezza, devono darla senza l'ausilio di riferimenti esterni. Due posizioni, quindi, affinché la definizione sia possibile, devono avere una qualche relazione che esse stesse siano sufficienti a definire. Precisamente lo stesso argomento si applica a tre posizioni, o a quattro; l'argomento perde la sua portata solo quando abbiamo esaurito le dimensioni della forma considerata. Così, in tre dimensioni, cinque posizioni non hanno una nuova relazione, non deducibile da quelle già note, poiché per definizione di dimensioni, tutte le relazioni coinvolte possono essere dedotte da quelle del quarto punto ai primi tre, insieme a quelle del quinto ai primi tre.

Possiamo dare all'argomentazione una forma più concreta, e forse più convincente, considerando la materia disposta nella nostra forma. Se due cose sono reciprocamente esterne, devono, poiché appartengono allo stesso mondo, avere una qualche relazione di esternalità; esiste, quindi, una relazione di esternalità tra due cose. Ma poiché la nostra forma è omogenea, la stessa relazione di esternalità può sussistere in altre parti della forma, *cioè* mentre le due cose considerate modificano le loro relazioni di esternalità verso altre cose. La relazione di esternalità tra due cose è, quindi, indipendente da altre cose. Pertanto, quando torniamo al linguaggio astratto della forma, due posizioni hanno una relazione determinata solo da quelle due posizioni, e indipendente da altre posizioni.

Lo stesso argomento si applica alle relazioni di tre posizioni, e in ogni caso la relazione deve apparire nella forma come non una mera inferenza dalle posizioni che mette in relazione. Infatti le relazioni, come abbiamo visto, costituiscono effettivamente una forma di esternalità, e non sono semplici inferenze da termini, che non si trovano da nessuna parte nella forma [144] .

In sintesi: poiché la posizione è relativa, due posizioni devono avere *una qualche* relazione tra loro; e poiché la nostra forma di esternalità è omogenea, questa relazione può rimanere invariata mentre le due posizioni cambiano le loro relazioni con altre posizioni. Pertanto, la loro relazione è intrinseca e indipendente da altre posizioni. Poiché la forma è un mero complesso di relazioni, la relazione in questione, se la forma è sensibile o intuitiva, deve essere essa stessa sensibile o intuitiva, e non una mera inferenza. In questo caso, una relazione unica deve essere una figura unica: in termini spaziali, la linea retta che unisce i due punti.

139. Con ciò, si completa la nostra deduzione della geometria proiettiva dalle *proprietà concettuali a priori* di una forma di esternalità. Che tale forma, se considerata come una cosa indipendente, sia autocontraddittoria, è stato ampiamente evidente nel corso della

discussione. Ma la scienza della forma si è fondata sul modo opposto di considerarla: l'abbiamo sempre considerata un mero complesso di relazioni e ne abbiamo dedotto le proprietà esclusivamente da questa visione. Le numerose difficoltà nell'applicare tale*a priori*allo spazio intuitivo e nello spiegare, come necessità logiche, proprietà che appaiono come dati sensoriali o intuitivi, devono essere rimandate al CapitoloIV.Per ora, desidero sottolineare che la geometria proiettiva è interamente*a priori*; che si occupa di un oggetto le cui proprietà sono logicamente dedotte dalla sua definizione, non scoperte empiricamente dai dati; che la sua definizione, ancora una volta, si fonda sulla possibilità di sperimentare la diversità nelle relazioni, o la molteplicità nell'unità; e che, pertanto, tutta la nostra scienza è logicamente implicata e deducibile dalla possibilità di tale esperienza.

140. Nella geometria metrica, al contrario, troveremo un risultato ben diverso. Sebbene le condizioni geometriche che rendono possibile la misurazione spaziale siano identiche, salvo lievi differenze nella formulazione, agli *assiomi a priori* discussi in precedenza, tuttavia la misurazione effettiva – che riguarda lo spazio effettivamente dato, non la mera costruzione intellettuale di cui abbiamo appena parlato – fornisce risultati che possono essere conosciuti solo empiricamente e approssimativamente, e non possono essere dedotti senza necessità di ragionamento. Gli spazi euclidei e non euclidei forniscono i vari risultati che sono *a priori* possibili; gli assiomi peculiari di Euclide – che propriamente non sono assiomi, ma risultati empirici della misurazione – determinano, entro i margini di errore dell'osservazione, quale di queste*a priori*si realizza nel nostro spazio reale. Pertanto, la misurazione riguarda in ogni sua parte una materia data empiricamente, non una creatura dell'intelletto, e i suoi*a priori*sono solo le condizioni presupposte nella possibilità della misurazione. Quali siano queste condizioni, lo vedremo nella seconda sezione di questo capitolo.

Sezione B.

GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA METRICA.

141. Abbiamo ora esaminato gli assiomi della geometria proiettiva e abbiamo visto che sono *deduzioni a priori* dal fatto che possiamo sperimentare l'esteriorità,*cioè* una molteplicità coesistente di cose diverse ma interrelate. Ma la geometria proiettiva, nonostante le sue pretese, non è l'intera scienza dello spazio, come è sufficientemente dimostrato dal fatto che non può distinguere traspazi euclidei e non euclidei [145] . A questo scopo, è necessaria la misurazione spaziale: la geometria metrica, con i suoi test quantitativi, è l'unica in grado di effettuare tale distinzione. Anche per ogni applicazione della geometria alla fisica è necessaria la misurazione; la legge di gravitazione, ad esempio, richiede la determinazione delle distanze effettive. In breve, per molti scopi, la geometria proiettiva è del tutto insufficiente: non è in grado, ad esempio, di distinguere tra diversi tipi di coniche, sebbene la loro distinzione sia di fondamentale importanza in molti campi del sapere.

La geometria metrica è dunque una parte necessaria della scienza dello spazio, e una parte non inclusa nella geometria descrittiva. Il suo elemento *a priori* , tuttavia, nella misura in cui è spaziale e non aritmetico, è lo stesso del postulato della geometria proiettiva, vale a dire l'omogeneità dello spazio, o il suo equivalente, la relatività della posizione. Possiamo infatti constatare che l' elemento *a priori* in entrambi i casi è probabilmente lo stesso. Infatti, l' *elemento a priori* nella geometria metrica sarà tutto ciò che è presupposto nella possibilità di misurazione spaziale, *cioè* di confronto spaziale quantitativo. Ma tale confronto presuppone semplicemente un'identità di qualità nota, la cui determinazione è precisamente il problema della geometria proiettiva. Pertanto, le condizioni per la possibilità di misurazione, nella misura in cui non sono aritmetiche, saranno esattamente le stesse di quelle per la geometria proiettiva.

142. La geometria metrica, dunque, pur essendo distinta dalla geometria proiettiva, non ne è indipendente, ma la presuppone e nasce dalla sua combinazione con l'idea estranea di*quantità*. Tuttavia, la forma matematica degli assiomi, nella geometria metrica, è leggermente diversa dalla loro forma nella geometria proiettiva. L'omogeneità dello spazio è sostituita dal suo equivalente, l'assioma della libera mobilità. L'assioma della retta è sostituito dall'assioma della distanza: due punti determinano una quantità unica, la distanza, che rimane inalterata in qualsiasi movimento dei due punti come un'unica figura. Questo assioma, infatti, si scoprirà implicare l'assioma della retta – tale quantità non potrebbe esistere se i due punti non determinassero una curva unica – ma la sua forma matematica è cambiata. Un altro cambiamento importante è il crollo del principio di dualità: la quantità può essere applicata alla retta, perché è divisibile in parti simili, ma non può essere applicata al punto indivisibile. Otteniamo così una ragione, che mancava nella geometria descrittiva, per preferire i punti, come elementi spaziali, alle linee rette oai piani [146] . Infine, con la quantità viene introdotta un'idea completamente nuova, vale a dire l'idea di*movimento*. Non che studiamo il movimento, o che alcuno dei nostri risultati faccia riferimento al movimento, ma che non possono, sebbene nella geometria proiettiva potessero, essere ottenuti senza almeno un movimento ideale delle nostre figure attraverso lo spazio.

Esaminiamo ora in dettaglio i prerequisiti della misurazione spaziale. Troveremo tre assiomi, senza i quali tale misurazione sarebbe impossibile, ma con i quali è sufficiente per decidere, empiricamente e approssimativamente, la natura euclidea o non euclidea del nostro spazio reale. Scopriremo inoltre che questi tre assiomi possono essere dedotti dalla concezione di una forma di esternalità e non dipendono da alcuna evidenza intuitiva. Essi sono, pertanto, come i loro equivalenti, gli assiomi della geometria proiettiva, *a priori* , e deducibili dalle condizioni dell'esperienza spaziale. Tale esperienza, di conseguenza, non può mai confutarli, poiché la sua stessa esistenza li presuppone.

I. *L'assioma della libera mobilità*.

143. La geometria metrica, per cominciare, può essere definita come la scienza che si occupa del confronto e delle relazioni tra grandezze spaziali. Il concetto di grandezza, quindi, è necessario fin dall'inizio. Alcuni assiomi di Euclide, di conseguenza, sono stati classificati

come aritmetici e si è supposto che non avessero nulla a che fare in particolare con lo spazio. Tali sono gli assiomi secondo cui quantità uguali sommate o sottratte a quantità uguali danno quantità uguali, e che cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro. Si dice che questi assiomi siano puramente aritmetici e non attribuiscano, come gli altri, un aggettivo allo spazio. Per quanto riguarda il loro uso in aritmetica, questo è ovviamente vero. Ma se un assioma aritmetico deve essere applicato alle grandezze spaziali, deve avere un qualchesignificato spaziale [147] , e quindi anche questa classe non è, in geometria,*semplicemente*aritmetica. Fortunatamente, l'elemento geometrico è lo stesso in tutti gli assiomi di questa classe: possiamo vedere subito, infatti, chenon altro che una definizione digrandezza spaziale [148] . Inoltre, poiché lo spazio di cui si occupa la geometria è infinitamente divisibile, una definizione di grandezza spaziale si riduce a una definizione di uguaglianza spaziale, perché, non appena abbiamo quest'ultima, possiamo confrontare due grandezze spaziali dividendo ciascuna in un numero di unità uguali e contando il numero di tali unità inciascuna [149] . Il rapporto del numero di unità è, ovviamente, il rapporto delle due grandezze.

144. Abbiamo dunque bisogno, fin dall'inizio, di un criterio di uguaglianza spaziale: senza tale criterio la geometria metrica diventerebbe del tutto impossibile. A prima vista, potrebbe sembrare che questo non debba essere un assioma, ma una semplice definizione. In parte è vero, ma non del tutto. La parte che è semplicemente una definizione è data dall'ottavo assioma di Euclide: "Le grandezze che coincidono esattamente sono uguali". Ma questo fornisce un criterio sufficiente solo quando le grandezze da confrontare occupano già la stessa posizione. Quando, come normalmente accade, le due grandezze spaziali sono esterne l'una all'altra – come, in effetti, deve accadere, se sono distinte e non intero e parte – le due grandezze possono essere fatte coincidere solo mediante un movimento di una o di entrambe. Affinché, quindi, la nostra definizione di grandezza spaziale possa dare risultati inequivocabili, la coincidenza quando sovrapposte, se mai può verificarsi, deve verificarsi sempre, qualunque sia il percorso seguito per ottenerla. Pertanto, se il semplice movimento potesse alterare le forme, il nostro criterio di uguaglianza verrebbe meno. Ne consegue che l'applicazione del concetto di grandezza alle figure nello spazio implica il seguenteassioma [150] : *le grandezze spaziali possono essere spostate da un luogo all'altro senza distorsione*; o, come si può dire,*le forme non dipendono in alcun modo dalla posizione assoluta nello spazio*.

L'assioma di cui sopra è l'assioma della Libera Mobilità [151] . Mi propongo di dimostrare (1) che la negazione di questo assioma implicherebbe assurdità logiche e filosofiche, per cui deve essere classificato come interamente *a priori* ; (2) che la Geometria metrica, se rifiutasse questo assioma, non sarebbe in grado, senza un'assurdità logica, di stabilire affatto la nozione di grandezza spaziale. La conclusione sarà che l'assioma non può essere provato o confutato dall'esperienza, ma è una condizione *a priori* della Geometria metrica. Poiché in tal modo sosterrò una posizione che è stata molto controversa, specialmente da Helmholtz ed Erdmann, dovrò entrare negli argomenti in modo piuttosto approfondito.

145. A.*Argomento filosofico.*La negazione dell'assioma implica una posizione assoluta e un'azione dello spazio*in sé* sulle cose. Infatti, l'assioma non afferma che i corpi reali, per fatto empirico, non cambino mai forma durante il loro passaggio da un luogo all'altro: al contrario, sappiamo che tali cambiamenti avvengono, a volteinmisura molto evidente, e sempre in una certa misura. Ma tali cambiamenti sono attribuiti non al cambiamento di luogo in quanto tale, bensì a cause fisiche: variazioni di temperatura, pressione, ecc. Ciò di cui il nostro assioma ha a che fare non sono corpi materiali reali, mafigure geometriche [152] , e afferma che una figura possibile in una qualsiasi posizione nello spazio è possibile in ogni altra. Il suo significato diventerà più chiaro facendo riferimento a un caso in cui non è valido, ad esempio lo spazio formato dalla superficie di un uovo. Qui, un triangolo disegnato vicino all'equatore non può essere spostato senza distorsione fino al punto, poiché non si adatterebbe più alla maggiore curvatura della nuova posizione: un triangolo disegnato vicino al punto non può essere adattato all'estremità più piatta, e così via. Pertanto, il metodo della sovrapposizione, come quello impiegato da Euclide nel LibroI, PropositionIV, diventa impossibile; le figure non possono essere spostate liberamente, anzi, data una qualsiasi figura, possiamo determinare una certa serie di posizioni possibili per essa sull'uovo, al di fuori delle quali diventa impossibile. Ciò che affermo, quindi, è che c'è un'assurdità filosofica nel supporre che lo spazio in generale sia di questa natura. Sull'uovo abbiamo segnato dei punti, come le due estremità; lo spazio formato dalla sua superficie non è omogeneo, e se gli oggetti vengono spostati al suo interno, esso deve di per sé esercitare un effetto distorcente su di essi, del tutto indipendentemente da cause fisiche; se non esercitasse tale effetto, gli oggetti non potrebbero essere spostati. Uno spazio di questo tipo non sarebbe quindi omogeneo, ma avrebbe punti di riferimento ben definiti, rispetto ai quali i corpi avrebbero una posizione assoluta, del tutto indipendente da qualsiasi altro corpo. Lo spazio non sarebbe più passivo, ma eserciterebbe un effetto preciso sulle cose, e dovremmo abituarci all'idea di punti di riferimento nello spazio vuoto; questi punti non sarebbero definiti dai corpi che li occupano, ma dai loro effetti su eventuali corpi che di volta in volta potrebbero occuparli. Questa mancanza di omogeneità e passività è, tuttavia, assurda; lo spazio, essendo una forma di esteriorità, deve ammettere solo una posizione relativa, non assoluta, e deve essere completamente omogeneo in ogni sua parte. Supporre il contrario significa attribuirgli una natura che nessuna forma di esteriorità può possedere. Dobbiamo quindi, per ragioni puramente filosofiche, ammettere che una figura geometrica possibile ovunque è possibile ovunque, che è l'assioma della Libera Mobilità.

146. B.*Argomento geometrico.*Vediamo ora che tipo di geometria potremmo costruire senza questo assioma. Lo standard ultimo di confronto delle grandezze spaziali deve, come abbiamo visto nell'introduzione dell'assioma, essere l'uguaglianza quando sovrapposte; ma dobbiamo forse, da questa uguaglianza, dedurre l'uguaglianza quando separate? Erdmann ha sostenuto che, per gli scopi più immediati della geometria, ciò non sarebbenecessario [153] . Potremmo costruire una nuova geometria, pensa, in cui le dimensioni variano con il movimento secondo una qualsiasi legge definita. Tale visione, come mostrerò più avanti, implica un errore logico sulla natura della grandezza. Ma prima di sottolinearlo, discutiamo le

conseguenze geometriche dell'assumere la sua verità. Supponiamo che la lunghezza di un arco infinitesimale in una posizione standard sia*ds*; allora in qualsiasi altra posizione*p*la sua lunghezza sarebbe *ds.f (p)*, dove si deve supporre nota la forma della funzione*f(p)*. Ma come possiamo determinare la posizione*p*? A questo scopo, abbiamo bisognodelle coordinate di*povvero*di una qualche misura della distanza dall'origine. Ma la distanza dall'origine potrebbe essere misurata solo se assumessimo che la nostra legge*f(p)* la misurasse. Supponiamo infatti che l'origine sia*O*e che*Op*sia una linea retta di cui si conosce la lunghezza. Se abbiamo un'asta di misura con cui percorriamo la linea e misuriamo archi infinitesimi successivi, l'asta di misura cambierà la sua lunghezza mentre ci muoviamo, cosicché un arco che appare, in base alla misura, essere*ds*sarà in realtà*f(s)ds*, dove*s*è la distanza percorsa in precedenza. Se, d'altra parte, muoviamo lentamente la nostralinea *Op* attraverso l'origine e misuriamo ogni segmento mentre passa, la nostra misura, è vero, non cambierà, ma ora non abbiamo alcun modo di scoprire la legge con cui un qualsiasi elemento ha cambiato la sua lunghezza per arrivare all'origine. Pertanto, finché non assumiamo la nostra funzione*f(p)*, non abbiamo alcun mezzo per determinare*p*, poiché abbiamo appena visto che le distanze dall'origine possono essere stimate solo per mezzo della legge*f(p)*. Ne consegue che l'esperienza non può né provare né confutare la costanza delle forme durante il movimento, poiché, se le forme non fossero costanti, dovremmo*assumere*una legge della loro variazione prima che la misurazione diventi possibile, e quindi la misurazione stessa non potrebbe rivelarci tale variazione[154] .

Tuttavia, una legge così arbitrariamente assunta *fornisce* , a prima vista, una geometria matematicamente possibile. La proposizione fondamentale, secondo cui due grandezze che possono essere sovrapposte in una qualsiasi posizione possono essere sovrapposte anche in qualsiasi altra, rimane valida. Infatti, due archi infinitesimi, le cui lunghezze nella posizione standard sono $_{ds,\ e}$ ds_2 , *in* qualsiasi altra posizione *p* avrebbero lunghezze *f(p)* $_{ds,}$ e *f(p)*ds_2 , cosicché il loro rapporto rimarrebbe inalterato. Da questa costanza del rapporto, come sappiamo grazie a Riemann e Helmholtz, segue la proposizione di cui sopra. Pertanto, tutto ciò che la geometria richiede, a quanto pare, come base per la misurazione, è un assioma secondo cui la variazione delle forme durante il moto segue una legge definita e nota, come quella assunta sopra.

147. In tale visione, tuttavia, come ho osservato sopra, vi è un errore logico riguardo alla natura della grandezza. Questo errore è già stato evidenziato trattando diErdmann [155] e non è necessario ripeterlo qui in modo conciso. Un giudizio di grandezza è essenzialmente un giudizio di confronto: in una quantità non misurata, il confronto riguarda il semplice più o meno, ma in una grandezza misurata, il confronto riguarda il preciso numero di volte. Parlare di differenze di grandezza, quindi,in un caso in cui il confronto non può rivelarle, è logicamente assurdo. Ora, nel caso sopra considerato, due grandezze, che appaiono uguali in una posizione, appaiono uguali anche quando confrontate in un'altra posizione. Non ha senso, quindi, supporre che le due grandezze siano disuguali quando separate, né supporre, di conseguenza, che abbiano cambiato la loro grandezza durante il movimento. Questa insensatezza della nostra ipotesi è il fondamento logico dell'indeterminatezza matematica

riguardo alla legge di variazione. Poiché dunque non esiste alcun modo di confrontare due figure spaziali, per quanto riguarda la grandezza, se non la sovrapposizione, l'unico assioma logicamente possibile, affinché la grandezza spaziale sia coerente, è l'assioma della libera mobilità nella forma sopra riportata.

148. Sebbene questo assioma sia*a priori*, la sua applicazione alla misurazione di corpi reali, come abbiamo visto discutendo le opinioni di Helmholtz, implica sempre unelemento empirico [156] . Il nostro assioma, quindi, fornisce solo la *condizione a priori* per eseguire un'operazione che, in concreto, è empirica, proprio come l'aritmetica fornisce la *condizione a priori* per un censimento. Poiché questo argomento è stato ampiamente trattato nel CapitoloIInondiròaltro al riguardo qui.

149. Rimangono, tuttavia, alcune obiezioni e difficoltà da discutere. In primo luogo, come otteniamo l'uguaglianza nei solidi, e nei casi kantiani della mano destra e della mano sinistra, o delle viti destrorse e sinistrorse, dove la sovrapposizione effettiva è impossibile? In secondo luogo, come possiamo assumere la congruenza come unica base possibile della misurazione spaziale, quando abbiamo di fronte a noi il caso del tempo, dove non è concepibile nulla di simile alla congruenza? In terzo luogo, si potrebbe obiettare che possiamo stimare immediatamente l'uguaglianza spaziale a occhio, con maggiore o minore precisione, e quindi avere una misura indipendente dalla congruenza. In quarto luogo, come è possibile la geometria metrica su superfici non congruenti, se la congruenza è la base della misurazione spaziale? Discuterò queste obiezioni in successione.

150. (1) Come misuriamo l'uguaglianza dei solidi? Questi potrebbero essere portati in effettiva congruenza solo se avessimo una quarta dimensionein cui operare [157] , e da quanto ho detto prima sull'assoluta necessità di questo test, potrebbe sembrare che dovremmo essere lasciati qui nella più totale ignoranza. Euclide tace sull'argomento, e in tutte le opere di geometria si assume come ovvio che due cubi di lato uguale siano uguali. Questa assunzione suggerisce che non siamo messi così male come saremmo stati senza la congruenza, come test di uguaglianza in una o due dimensioni; perché ora possiamo almeno essere sicuri che due cubi hanno tutti i lati e tutte le facce uguali. Due tali cubi differiscono, quindi, in nessuna qualità spaziale sensibile se non nella posizione, poiché il volume, in questo caso almeno, non è una qualità sensibile. Sono, quindi, per quanto riguarda tali qualità, indiscernibili. Se i loro posti fossero scambiati, potremmo conoscere il cambiamento dal loro colore, o da qualche altra proprietà non geometrica; Ma per quanto riguarda qualsiasi proprietà di cui la geometria possa tenere conto, tutto sembrerebbe come prima. Ipotizzare una differenza di volume, quindi, significherebbe attribuire un effetto alla mera posizione, cosa che abbiamo visto essere inammissibile discutendo della libera mobilità. A parte la posizione, sono geometricamente indiscernibili, e possiamo ricorrere all'Identità degli Indiscernibili per stabilire la loro concordanza nell'unica proprietà geometrica rimanente, ovvero il volume. Questo può sembrare un principio piuttosto strano da usare in matematica, e per la geometria la loro uguaglianza è forse meglio considerata come una definizione; ma se esigiamo un fondamento filosofico per questa definizione, credo che esso si trovi solo

nell'Identità degli Indiscernibili. Possiamo, senza errore, far sì che la nostra*definizione*di uguaglianza tridimensionale si basi sulla congruenza bidimensionale. Poiché un confronto diretto in termini di volume è impossibile, siamo liberi di*definire*due volumi uguali quando tutte le loro linee, superfici, angoli e angoli solidi sono congruenti, dato che in tal caso non rimane alcuna*misurabile*tra le figure che compongono i due volumi. Naturalmente, non appena avremo stabilito questo caso di uguaglianza dei volumi, il resto della teoria ne consegue, come risulta evidente dal metodo ordinario di integrazione dei volumi, che consiste nel dividerli in piccoli cubi.

Pertanto, la congruenza *aiuta* a stabilire l'uguaglianza tridimensionale, sebbene non possa *dimostrarla* direttamente ; e lo stesso principio filosofico, quello dell'omogeneità dello spazio, con cui è stata dimostrata la congruenza, ci viene in aiuto anche qui. Ma che dire delle viti destrorse e sinistrorse? Qui non possiamo più applicare l'identità degli indiscernibili, poiché le due sono ben distinguibili. Ma, come per i solidi, anche qui la libera mobilità può esserci di grande aiuto. Ci permette, tramite misurazioni ordinarie, di dimostrare che le relazioni interne di entrambe le viti sono le stesse e che la differenza risiede solo nella loro relazione con altri oggetti nello spazio. Conoscendo queste relazioni interne, possiamo calcolare, grazie alla geometria resa possibile dalla libera mobilità, tutte le proprietà geometriche di queste viti – raggio, passo, ecc. – e dimostrare che sono singolarmente uguali in entrambe. Ma questo è tutto ciò che ci serve. È possibile un confronto indiretto, sebbene non immediato. Entrambe possono, ad esempio, essere confrontate con il cilindro su cui entrambe si incastrerebbero, e in questo modo si può dimostrare la loro uguaglianza. Una dimostrazione esattamente simile vale, naturalmente, anche per gli altri casi, mani destre e sinistre, triangoli sferici, ecc. Nel complesso, questi casi confermano la mia argomentazione; poiché mostrano, come Kant intendeva che mostrassero [[158]] , l'essenziale relatività dello spazio.

151. (2) Per quanto riguarda il tempo, qui non è concepibile alcuna congruenza, poiché per ottenere una congruenza è sempre necessaria – come abbiamo visto nel caso dei solidi – una dimensione in più rispetto a quella delle grandezze confrontate. Nessun giorno può essere portato in coincidenza temporale con un altro giorno, per dimostrare che i due si sovrappongono esattamente; siamo quindi ridotti all'ipotesi arbitraria che un certo moto o insieme di moti, che ci viene dato dall'esperienza, sia uniforme. Fortunatamente, abbiamo un ampio insieme di moti che concordano tutti approssimativamente: l'oscillazione del pendolo, la rotazione e la rivoluzione della terra e dei pianeti, ecc. Questi non concordano esattamente, ma ci conducono alle leggi del moto, mediante le quali siamo in grado, sulla nostra ipotesi arbitraria, di stimare le loro piccole deviazioni dall'uniformità; proprio come l'ipotesi della libera mobilità ci ha permesso di misurare le deviazioni dei corpi reali dalla rigidità. Ma qui, come là, un'altra possibilità ci è matematicamente aperta e può essere esclusa solo per la sua assurdità filosofica; Avremmo potuto supporre che l'insieme di moti approssimativamente concordanti sopra descritto avesse tutti velocità che variavano approssimativamente come una funzione arbitraria del tempo,*f(t)*, misurata a partire da un'origine arbitraria. Tale ipotesi li manterrebbe comunque quasi sincroni come prima e darebbe un sistema di meccanica altrettanto possibile, sebbene più complesso; invece della

prima legge del moto, avremmo la seguente: una particella persevera nel suo stato di quiete, o di moto rettilineo con velocità variabile come*f(t)*, tranne nella misura in cui è costretta a modificare tale stato dall'azione di forze esterne. Tale ipotesièmatematicamente possibile, ma, come quella analoga per lo spazio, è logicamente esclusa dalla natura comparativa del giudizio di quantità, e filosoficamente dal fatto che implica il tempo assoluto come agente determinante del cambiamento, mentre il tempo non può mai, filosoficamente, essere altro che una forma passiva, astratta dal cambiamento. Ho introdotto questo parallelismo dal tempo, non perché abbia un'influenza diretta sull'argomento, ma come caso più semplice che può servire a illustrare il mio ragionamento nel caso più complesso dello spazio. Infatti, poiché il tempo, in matematica, è unidimensionale, le difficoltà matematiche sono più semplici che in geometria; e sebbene nulla corrisponda esattamente alla congruenza, esiste una miscela molto simile di necessità matematica e filosofica, che fornisce, infine, un assioma del tutto definito come base della misurazione del tempo, corrispondente alla congruenza come base dellamisurazione dello spazio [159] .

152. (3) Il caso della misurazione del tempo suggerisce la terza delle obiezioni sopra esposte all'assoluta necessità dell'assioma della Libera Mobilità. La psicofisica ha dimostrato che abbiamo una capacità approssimativa, per mezzo di quello che si potrebbe chiamare il senso della durata, di stimare immediatamente tempi brevi e uguali. Ciò stabilisce una misura approssimativa indipendente da qualsiasi moto uniforme ipotizzato, e anche nello spazio, si può dire, abbiamo una simile capacità di confronto immediato. Possiamo vedere, con un'ispezione immediata, che le suddivisioni di un righello non sono grossolanamente imprecise; e quindi, si può dire, abbiamo sia una misura indipendente dalla congruenza, sia potremmo anche scoprire, per esperienza, qualsiasi deviazione grossolana dalla Libera Mobilità. Contro questa visione, tuttavia, vi è fin dall'inizio un'obiezione psicologica molto fondamentale. È stato sostenuto che ogni nostro confronto di grandezze spaziali procede per sovrapposizione ideale. Così dice James (Psicologia, Vol.II, p. 152): "Anche quando percepiamo una suddivisione come vagamente più grande o più piccola, la mente deve passare rapidamente tra essa e l'altra suddivisione, e ricevere l'immediato shock sensoriale della maggiore", e "nella misura in cui le suddivisioni di uno spazio sensoriale devono essere*misurate* esattamente l'una rispetto all'altra, le forme oggettive che occupano una suddivisione devono essere sovrapposte direttamente o indirettamente all'altra[160] ".

Anche se rinunciassimo a questa obiezione fondamentale, ne rimarrebbero altre. Innanzitutto, tali giudizi di uguaglianza sono solo approssimazioni molto grossolane e non possono essere applicati a linee di lunghezza superiore a una certa soglia, se non altro perché tali linee non possono essere visualizzate con precisione una accanto all'altra. Pertanto, questo metodo può offrirci una certa sicurezza solo nel nostro immediato vicinato e non potrebbe in alcun modo giustificare operazioni come quelle necessarie per la costruzione di mappe, tanto meno per la misurazione di distanze astronomiche. Potrebbero al massimo consentirci di affermare che alcune linee sono più lunghe di altre, ma lascerebbero la geometria in una posizione non migliore di quella del calcolo edonistico, in cui dipendiamo da una misura puramente soggettiva. In effetti, un tale metodo è riconosciuto come talmente

impreciso che la regola del piede è tanto necessaria nella vita quotidiana quanto nella scienza. Inoltre, nessuno si fiderebbe di tali giudizi immediati, se non fosse per il fatto che il test più rigoroso della congruenza li conferma in qualche misura; se non potessimo applicare questo test, non avremmo alcun motivo per fidarci di essi, nemmeno nella misura in cui lo facciamo. Pertanto, in questo caso, non dovremmo avere alcuna vera via di fuga dalla nostra assoluta dipendenza dall'assioma della libera mobilità.

153. (4) Un'ultima osservazione chiarificatrice è necessaria prima che la nostra dimostrazione di questo assioma possa considerarsi completa. Abbiamo parlato sopra della geometria su un uovo, dove la libera mobilità non è valida. Cosa c'è, mi si potrebbe chiedere, di più impossibile di questa geometria sull'uovo riguardo a una geometria completamente non congruente? La risposta è ovvia. La geometria delle superfici non congruenti è*solo*mediante l'uso di infinitesimi, e nell'infinitesimale tutte le superfici diventano piane. La formula fondamentale, quella per la lunghezza di un arco infinitesimale, si ottiene solo supponendo che tale arco possa essere trattato come una linea retta e che la geometria piana euclidea possa essere applicata nelle immediate vicinanze di qualsiasi punto. Se non avessimo la nostra misura euclidea, che potrebbe essere spostata senza distorsione, non avremmo alcun metodo per confrontare piccoli archi in luoghi diversi, e la geometria delle superfici non congruenti crollerebbe. Pertanto, l'assioma della libera mobilità, per quanto riguarda lo spazio tridimensionale, è necessariamente implicato e presupposto nella geometria delle superfici non congruenti; la possibilità di quest'ultima, quindi, è una possibilità dipendente e derivata, e non può costituire un argomento contro la *necessità a priori* della congruenza come criterio di uguaglianza.

154. Bisogna osservare che l'assioma della Libera Mobilità, come l'ho enunciato, include anche l'assioma che Helmholtz chiama Monodromia. Questo afferma che un corpo non altera le sue dimensioni in seguito a una rotazione completa di quattro angoli retti, ma occupa alla fine la stessa posizione di partenza. La presunta necessità matematica di formulare un assioma separato per questa proprietà dello spazio è stata smentita da Sofo Lie (v. Cap . I, § 45) ; filosoficamente, è chiaramente un caso particolare di Libera Mobilità [161] , e in effetti un caso particolarmente ovvio, poiché una traslazione effettivamente apporta qualche cambiamento a un corpo, vale a dire un cambiamento di posizione, ma si può supporre che una rotazione di quattro angoli retti sia stata eseguita un numero qualsiasi di volte senza che ciò appaia nel risultato, e l'assurdità di attribuire allo spazio il potere di far crescere i corpi nel processo è palpabile; Tutto quanto detto sopra sulla congruenza in generale si applica con ancora maggiore evidenza a questo caso specifico.

155. L'assioma della libera mobilità implica, per essere vero, l'omogeneità dello spazio, ovvero la completa relatività della posizione. Infatti, se una qualsiasi forma, possibile in una parte dello spazio, è sempre possibile anche in un'altra, ne consegue che tutte le parti dello spazio sono qualitativamente simili e non possono, quindi, essere distinte da alcuna proprietà intrinseca. Pertanto, se il nostro assioma è vero, le posizioni nello spazio devono essere interamente definite da relazioni esterne,*cioè la posizione non è una proprietà*

intrinseca, ma puramente relativa, delle cose nello spazio. Se potesse esistere una posizione assoluta, in breve, la geometria metrica sarebbe impossibile. Questa relatività della posizione è il postulato fondamentale di tutta la geometria, a cui conduce ciascuno degli assiomi metrici necessari e da cui, viceversa, ciascuno di questi assiomi può essere dedotto.

156. Questa deduzione inversa, per quanto riguarda la Libera Mobilità, non è molto difficile e deriva dall'argomentazione della SezioneA[162], che riassumerò brevemente. In primo luogo, l'esternalità è una concezione essenzialmente relativa: nulla può essere esterno a se stesso. Essere esterno a qualcosa significa essere un altro con una qualche relazione con quella cosa. Quindi, quando astraiamo una forma di esternalità da ogni contenuto materiale e la studiamo in isolamento, la posizione apparirà necessariamente come puramente relativa: non può avere alcuna qualità intrinseca, poiché la nostra forma consiste di pura esternalità, e l'esternalità non contiene ombra o traccia di una qualità intrinseca. Da qui deriviamo il nostro postulato fondamentale, la relatività della posizione. Da ciò segue l'omogeneità della nostra forma, poiché qualsiasi qualità in una posizione, che distinguesse quella posizione da un'altra, sarebbe necessariamente più o meno intrinseca e contraddirebbe la pura relatività. Infine, la libera mobilità deriva dall'omogeneità, poiché la nostra forma non sarebbe omogenea se non ammettesse, in ogni sua parte, forme o sistemi di relazioni che ammette in qualsiasi altra parte. La libera mobilità, pertanto, è una proprietà necessaria di ogni possibile forma di esternalità.

157. Riassumendo l'argomentazione appena conclusa, possiamo rappresentarla, in conseguenza dei due paragrafi precedenti, sotto forma di un cerchio completo. Partendo dalle condizioni di misurazione spaziale, abbiamo constatato che il confronto, necessario per la misurazione, può essere effettuato solo per sovrapposizione. Abbiamo inoltre constatato che il risultato di tale confronto sarà inequivocabile solo se le grandezze e le forme spaziali non vengono alterate dal movimento nello spazio, ovvero se, in altre parole, le forme non dipendono dalla posizione assoluta nello spazio. Ma questo assioma può essere vero solo se lo spazio è omogeneo e la posizione è meramente relativa. Viceversa, se si assume che la posizione sia meramente relativa, un cambiamento di grandezza nel movimento – che implica l'affermazione della posizione assoluta – è impossibile, e il nostro criterio di uguaglianza spaziale è quindi adeguato. Ma la posizione in qualsiasi forma di esternalità deve essere puramente relativa, poiché l'esternalità non può essere una proprietà intrinseca di nulla. Il nostro assioma, pertanto, è*a priori* in unduplice senso. Essa è presupposta in ogni misurazione spaziale ed è una proprietà necessaria di qualsiasi forma di esternalità. Una simile doppia priorità, come vedremo, compare anche negli altri nostri assiomi necessari.

II. *L'assioma delle dimensioni*[163].

158. Abbiamo visto, discutendo l'assioma della Libera Mobilità, che ogni posizione è relativa, cioè una posizione esiste solo in virtù direlazioni[164]. Ne consegue che, se le posizioni possono essere definite, devono essere definite in modo univoco ed esaustivo da un numero finito di tali relazioni. Se la Geometria deve essere possibile, deve accadere che, dopo che sono state date sufficienti relazioni per determinare univocamente un punto, le sue

relazioni con qualsiasi nuovo punto noto siano deducibili dalle relazioni già date. Quindi otteniamo, come*a priori* della Geometria, logicamente indispensabile alla sua esistenza, l'assioma che *lo Spazio deve avere un numero intero finito di Dimensioni*. Infatti ogni relazione richiesta nella definizione di un punto costituisce una dimensione, e una frazione di una relazione è priva di significato. Il numero di relazioni richieste deve essere finito, poiché un numero infinito di dimensioni sarebbe praticamente impossibile da determinare. Se ricordiamo il nostro assioma di libera mobilità, e ricordiamo anche che lo spazio è un continuum, possiamo enunciare il nostro assioma, per la geometria metrica, nella forma data da Helmholtz (v. Cap. I. § 25) : " In uno spazio di n dimensioni, la posizione di ogni punto è determinata univocamente dalla misurazione di n variabili indipendenti continue (coordinate).[165] "

159. Tanto è dunque*a priori*alla geometria metrica. La restrizione delle dimensioni a tre sembra, al contrario, essere interamente opera dell'esperienza[166] . Questa restrizione non può essere logicamente necessaria, poiché non appena abbiamo formulato un qualsiasi sistema analitico, esso appare del tutto arbitrario. Perché, siamo portati a chiederci, non possiamo aggiungere una quarta coordinata alle nostre*x*,*y*,*z*, o dare un significato geometrico ax^4 ? In questa forma più particolare, siamo tentati di considerare l'assioma delle dimensioni, come il numero di abitanti di una città, come un fatto puramente statistico, senza maggiore necessità di quanto ne abbiano tali fatti.

La geometria fornisce una prova intrinseca della verità della mia divisione dell'assioma delle dimensioni in una parte *a priori* e una empirica. Infatti, mentre l'estensione del numero di dimensioni a quattro, o a *n* , non altera nulla nella geometria piana e solida, ma aggiunge solo un nuovo ramo che non interferisce in alcun modo con il vecchio, *un* certo numero di dimensioni è assunto in tutte le geometrie, né è possibile concepire una geometria che sia esente da tale assunzione[167] .

160. Poiché il punto sembra di un certo interesse, ripetiamo la nostra dimostrazione dell'priorità di questo assioma da un punto di vista leggermente diverso. Inizieremo, questa volta, dalla concezione più astratta dello spazio, come quella che troviamo nella dissertazione di Riemann o nelle estensioni di Erdmann. Abbiamo qui una varietà ordinata, infinitamente divisibile e che consente la liberamobilità[168] . La libera mobilità implica, come abbiamo visto, la capacità di passare continuamente da un punto qualsiasi a un altro, percorrendo qualsiasi tragitto che ci sembri piacevole; implica anche che, in un tale tragitto, non si verifichino cambiamenti se non cambiamenti di mera posizione,*cio*èle posizioni non differiscono l'una dall'altra in alcun modo qualitativo. (Questa assenza di differenza qualitativa è il segno distintivo dello spazio rispetto ad altre varietà, come i sistemi cromatici e tonali: in questi, ogni elemento ha un valore sensoriale qualitativo definito, mentre nello spazio, il valore sensoriale di una posizione dipende interamente dalla sua relazione spaziale con il nostro corpo, e non è quindi intrinseco, ma relativo.) Dall'assenza di differenze qualitative tra le posizioni, segue logicamente che le posizioni esistono solo in virtù di altre posizioni; una posizione differisce da un'altra solo perché sono due, non per qualcosa di

intrinseco in nessuna delle due. La posizione è quindi definita semplicemente e unicamente dalla relazione con altre posizioni. Qualsiasi posizione, pertanto, è completamente definita quando, e solo quando, sono state fornite sufficienti relazioni di questo tipo da consentirci di determinarne la relazione con qualsiasi nuova posizione, essendo questa nuova posizione definita dallo stesso numero di relazioni. Ora, affinché tale definizione sia possibile, deve essere sufficiente un numero finito di relazioni. Ma ogni relazione di questo tipo costituisce una dimensione. Pertanto, affinché la geometria sia possibile, è*a priori*necessario che lo spazio abbia un numero finito e intero di dimensioni.

161. La limitazione delle dimensioni a tre è, come abbiamovisto, empirica; tuttavia, non è soggetta all'imprecisione e all'incertezza che solitamente appartengono alla conoscenza empirica. Infatti, le alternative che la logica lascia al senso sono discrete: se le dimensioni non sono tre, devono essere due o quattro o qualche altro numero, cosicché *piccoli*errori sono fuori discussione[[169]] . Pertanto, la certezza finale dell'assioma delle tre dimensioni, sebbene in parte dovuta all'esperienza, è di un ordine di grandezza ben diverso da quella (per esempio) della legge di gravitazione. In quest'ultima, una piccola imprecisione potrebbe esistere e rimanere inosservata; nel primo, un errore dovrebbe essere così considerevole da essere assolutamente impossibile da trascurare. Ne consegue che la certezza del nostro intero assioma, che il numero delle dimensioni sia tre, è quasi pari a quella dell'elemento *a priori* , poiché questo elemento lascia al senso una disgiunzione definita di possibilità discrete.

III. *L'assioma della distanza*.

162. Abbiamo già visto, discutendo di geometria proiettiva, che due punti devono determinare una curva unica, la retta. Nella geometria metrica, l'assioma corrispondente è che due punti devono determinare una grandezza spaziale unica, la distanza. Mi propongo di dimostrare, in ciò che segue, (1) che se la distanza, come grandezza completamente determinata da due punti, non esistesse, la grandezza spaziale non sarebbe misurabile; (2) che la distanza può essere determinata da due punti solo se esiste una curva effettiva nello spazio determinata da quei due punti; (3) che l'esistenza di tale curva può essere dedotta dalla concezione di una forma di esternalità; e (4) che l'applicazione di una grandezza a tale curva porta necessariamente a una certa grandezza, vale a dire la distanza, determinata univocamente da due punti qualsiasi che determinano la curva. La conclusione sarà, se queste proposizioni potranno essere sostenute con successo, che l'assioma della distanza è*a priori*nello stesso duplice senso dell'assioma della libera mobilità,*ovvero*è presupposto nella possibilità di misurazione ed è necessariamente vero per qualsiasi possibile forma di esternalità.

163. (1) La possibilità di misurazione spaziale ci permette di dedurre l'esistenza di una grandezza determinata univocamente da due punti qualsiasi. La dimostrazione di ciò dipende dall'assioma della libera mobilità, o dal suo equivalente, l'omogeneità dello spazio. Abbiamo visto che questi sono coinvolti nella possibilità di misurazione spaziale; possiamo quindi impiegarli in qualsiasi argomento riguardante le condizioni di questa possibilità.

Innanzitutto, affinché la geometria sia possibile, due punti devono avere *una qualche* relazione tra loro, poiché abbiamo visto che solo tali relazioni costituiscono la posizione o la localizzazione. Ma se due punti hanno una relazione tra loro, questa deve essere una relazione intrinseca. Infatti, dall'assioma di

Mobilità libera, secondo la quale due punti, formando una figura congruente con la coppia data, possono essere costruiti in qualsiasi parte dello spazio. Se ciò non fosse possibile, abbiamo visto che la geometria metrica non potrebbe esistere. Ma entrambe le figure possono essere considerate composte da due punti e dalla loro relazione; se le due figure sono congruenti, ne consegue che la relazione è quantitativamente la stessa per entrambe le figure, poiché la congruenza è il criterio di uguaglianza spaziale. Quindi i due punti hanno una relazione quantitativa, tale che possono attraversare tutto lo spazio in un moto combinato senza in alcun modo alterare tale relazione. Ma in un moto così generale, qualsiasi relazione esterna dei due punti, qualsiasi relazione che coinvolga altri punti o figure nello spazio, deve essere alterata [170] . Quindi la relazione tra i due punti, essendo inalterata, deve essere una relazione intrinseca, una relazione che non coinvolge altri punti o figure nello spazio; e questa relazione intrinseca la chiamiamo distanza [171] .

164. Si potrebbe obiettare, all'argomentazione di cui sopra, che essa implica una*petitio principii*. Si è infatti assunto che i due punti e la loro relazione formino una figura, alla quale altre figure possono essere congruenti. Ora, se due punti non hanno alcuna relazione intrinseca, sembrerebbe che non possano formare una tale figura. L'argomentazione, quindi, apparentemente presuppone ciò che doveva dimostrare. Perché, ci si potrebbe chiedere, non dovrebbero essere necessari tre punti prima di ottenere una qualsiasi relazione, che la Libera Mobilità ci permette di costruire ex novo in altre parti dello spazio?

La risposta a questa domanda, così come alla corrispondente questione nella prima sezione di questo capitolo, risiede, a mio avviso, nella passività dello spazio, o nella mutua indipendenza delle sue parti. Da questa indipendenza, infatti, consegue che qualsiasi figura, o qualsiasi insieme di punti, può essere analizzata senza fare riferimento ad altre figure o punti. Questo principio è alla base dell'infinita divisibilità, dell'uso della quantità in geometria e di ogni possibilità di isolare figure particolari per la discussione. Ne consegue che due punti non possono dipendere, per quanto riguarda la loro relazione, da altri punti o figure, perché se così fosse, dovremmo supporre un'azione di tali punti o figure sui due punti considerati, il che contraddirebbe la mutua indipendenza delle diverse posizioni. Per illustrare con un esempio: la relazione tra due punti dati non dipende dagli altri punti della retta su cui giacciono i punti dati. Infatti, solo attraverso la loro relazione, *cioè* attraverso la retta che essi determinano, si può sapere se gli altri punti della retta hanno una qualche connessione particolare con la coppia di punti data.

165. Ma perché, ci si potrebbe chiedere, dovrebbe esserci una sola relazione di questo tipo tra due punti? Perché non diverse? La risposta sta nel fatto che i punti sono interamente costituiti da relazioni e non hanno una natura intrinseca propria[172] . Un punto è

definito dalle sue relazioni con altri punti e, una volta date le relazioni necessarie alla definizione, non sono possibili nuove relazioni con i punti utilizzati nella definizione, poiché il punto definito non ha qualità da cui tali relazioni potrebbero derivare. Ora, una relazione con un qualsiasi altro punto è altrettanto valida per la definizione quanto lo sarebbero di più, poiché, per quante ne avessimo, rimarrebbero tutte inalteratein unmoto combinato di entrambi i punti. Quindi può esserci una sola relazione determinata da due punti qualsiasi.

166. (2) Abbiamo così stabilito la nostra prima proposizione: due punti hanno una e una sola relazione determinata in modo univoco da quei due punti. Questa relazione la chiamiamo la loro distanza. Resta da considerare le condizioni della misurazione della distanza,*cio*èfino a che punto un valore univoco per la distanza coinvolge una curva determinata in modo univoco dai due punti.

In primo luogo, una qualche curva che unisce i due punti è implicata nella suddetta nozione di un movimento combinato dei due punti, o di altri due punti che formano una figura congruente con i primi due. Infatti, senza una tale curva, non si può sapere che le due coppie di punti sono congruenti, né possiamo avere alcun test per scoprire quando una coppia di punti si muove come un'unica figura [173] . La distanza deve quindi essere misurata da una qualche linea che unisce i due punti. Ma deve necessariamente essere una linea che i due punti determinano completamente?

167. Siamo abituati a definire la linea retta come la*più breve*tra due punti, il che implica che la distanza potrebbe essere misurata altrettanto bene da linee curve. Ritengo che questa implicazione sia errata, per le seguenti ragioni. Quando parliamo della lunghezza di una curva, possiamo dare un senso alle nostre parole solo supponendo che la curva sia divisa in archi rettilinei infinitesimi, la cui somma fornisce la lunghezza di una linea retta equivalente; quindi, a meno che non presupponiamo la linea retta, non abbiamo modo di confrontare le lunghezze di curve diverse e, di conseguenza, non possiamo mai scoprire l'applicabilità della nostra definizione. Si potrebbe pensare, forse, che un'altra linea, ad esempio una circonferenza, possa essere usata come base di misurazione. Ma per stimare in questo modo la lunghezza di una curva diversa da una circonferenza, dovremmo dividere la curva in archi circolari infinitesimi. Ora, due punti successivi non determinano una circonferenza, quindi un arco formato da due punti avrebbe una lunghezza indeterminata. È vero che, se escludiamo i raggi infinitesimi per i cerchi di misura, le lunghezze degli archi infinitesimi sarebbero determinate, anche se i cerchi variassero, ma ciò accade solo perché tutti i piccoli archi di cerchio passanti per due punti consecutivi coincidono con la retta passante per quei due punti. Pertanto, anche con l'aiuto dell'arbitraria restrizione a un raggio finito, tutto ciò che accade è che veniamo ricondotti alla retta. Se, per rimediare, prendiamo tre punti consecutivi della nostra curva e calcoliamo la distanza mediante l'arco del cerchio di curvatura, la nozione di distanza perde la sua proprietà fondamentale di essere una relazione tra*due*punti. Infatti, non si potrebbe dire che due punti consecutivi dell'arco abbiano una distanza corrispondente l'uno dall'altro: sarebbero necessari tre punti prima che la nozione di distanza diventi applicabile. Quindi il cerchio non è una base possibile per la misurazione, e

obiezioni simili si applicano, ovviamente, con maggiore forza, a qualsiasi altra curva. Tutto questo ragionamento è volto a mostrare, in dettaglio, l'impossibilità logica di misurare la distanza mediante una curva non completamente definita dai due punti di cui si richiede la distanza. Se nel ragionamento precedente avessimo considerato la distanza misurata da cerchi di*raggio dato*, avremmo introdotto nella sua definizione una relazione con punti diversi dai due di cui si doveva misurare la distanza, il che, come abbiamo visto, costituisce una fallacia logica. Inoltre, come possiamo sapere che tutti i cerchi hanno lo stesso raggio, se non disponiamo di una misura di distanza indipendente?

168. Una linea retta, dunque, non è la*più breve*, ma è semplicemente*la*distanza tra due punti: fin qui, questa conclusione è rimasta valida. Ma supponiamo di avere due o più curve passanti per due punti, e che tutte queste curve siano congruenti*tra loro*. Diremmo allora, in conformità con la definizione di uguaglianza spaziale, che le lunghezze di tutte queste curve sono uguali. Ora, potrebbe accadere che, sebbene nessuna delle curve sia determinata in modo univoco dai due punti estremi, la lunghezza comune di tutte le curve lo sia. In questo caso, cosa ci impedirebbe di chiamare questa lunghezza comune la distanza tra di esse, anche se nessuna figura univoca nello spazio le corrisponde? Questo è il caso contemplato dalla geometria sferica, dove, come su una sfera, gli antipodi possono essere uniti da un numero infinito di geodetiche, tutte di uguale lunghezza. La difficoltà ipotizzata, quindi, non è puramente immaginaria, ma è una difficoltà che la geometria moderna ci costringe ad affrontare. Di conseguenza, la tratterò in modo più approfondito.

169. Per cominciare, devo sottolineare che il mio assioma non è del tutto equivalente a quello di Euclide. L'assioma di Euclide afferma che due rette non possono racchiudere uno spazio,*cio*ènon possono avere più di un punto in comune. Ora, se ogni coppia di punti, senza eccezione, determina un'unica retta, ne consegue, naturalmente, che due rette diverse possono avere un solo punto in comune: fin qui, i due assiomi sono equivalenti. Ma può accadere, come nello spazio sferico, che due punti*in generale*determinino un'unica retta, ma non lo facciano quando hanno tra loro la relazione speciale di essere antipodi. In un tale sistema ogni coppia di rette nello stesso piano si incontra in due punti, che sono l'uno l'antipodo dell'altro; ma due punti,*in generale*, determinano comunque un'unica retta. Siamo ancora in grado, quindi, di ottenere distanze da rette uniche, eccetto nei casi limite; In questi casi, possiamo prendere un punto qualsiasi intermedio tra i due antipodi, unirlo a entrambi con la*stessa*linea retta e misurarne la distanza da questi ultimi nel modo usuale. La somma di queste distanze fornisce quindi un valore univoco per la distanza tra gli antipodi.

Pertanto, anche nello spazio sferico, siamo di grande aiuto dall'assioma della retta; ogni misurazione lineare è effettuata da esso, e i casi eccezionali possono essere trattati, grazie al suo aiuto, con i metodi usuali per il calcolo dei limiti. Lo spazio sferico, quindi, non è così avverso come inizialmente sembrava alla necessità *a priori* dell'assioma. Tuttavia, finora non abbiamo attaccato il nucleo dell'obiezione sollevata dallo spazio sferico. È nostro dovere ora procedere a questo attacco.

170. Si ricorderà che, nella nostra *a priori* che due punti devono avere una relazione definita, abbiamo ritenuto impossibile che quei due punti avessero, rispetto al resto dello spazio, una relazione che non fosse alterata dal movimento. Ora, nello spazio sferico, nel caso particolare in cui i due punti siano antipodi, essi *hanno* una relazione, non alterata dal movimento, con il resto dello spazio: la relazione, cioè, che la loro distanza è pari alla metà della circonferenza dell'universo. Nella nostra precedente discussione, abbiamo ipotizzato che qualsiasi relazione con lo spazio esterno debba essere una relazione di posizione, e una relazione di posizione deve essere alterata dal movimento. Ma con uno spazio finito, in cui abbiamo una grandezza assoluta, diventa possibile un'altra relazione, vale a dire una relazione di grandezza. I punti antipodiali, di conseguenza, come i punti coincidenti, non determinano più un'unica linea retta. Ed è istruttivo osservare che, di conseguenza, vi è un'ambiguità nell'espressione per la distanza, come la normale ambiguità nella misurazione angolare. Se $1/k^2$ è la costante spaziale e *d* è un valore per la distanza tra due punti, $2\pi kn \pm d$, dove *n* è un intero qualsiasi, è un valore altrettanto valido. La distanza è, in breve, una funzione periodica come l'angolo. Pertanto, tale situazione conferma piuttosto che smentire la mia tesi, secondo cui la distanza dipende da una curva determinata univocamente da due punti. Infatti, non appena abbandoniamo questa determinazione univoca, vediamo che nella nostra espressione per la distanza si insinuano delle ambiguità. La distanza ha ancora un insieme di *discreti*, corrispondenti al fatto che, dato un punto, la retta è determinata univocamente per tutti gli altri punti tranne uno, il punto antipodale. È allettante proseguire e dire: se per *ogni* coppia di punti esistesse un numero infinito di curve utilizzate per misurare la distanza, la distanza potrebbe assumere, per la stessa coppia di punti, non solo una serie discreta, ma una *continua* di valori.

171. Questa, tuttavia, è pura speculazione. Giungo ora al *pezzo forte* della mia argomentazione. L'ambiguità nello spazio sferico è sorta, come abbiamo visto, da una relazione di *grandezza* con il resto dello spazio: tale relazione non viene alterata dal movimento dei due punti e, pertanto, non rientra nel nostro ragionamento introduttivo. Ma che cos'è questa relazione di grandezza? Semplicemente una relazione tra la *distanza* tra i due punti e una *distanza* data dalla natura dello spazio in questione. Ne consegue che tale relazione *presuppone* una misura di distanza e non deve, quindi, essere presa in considerazione in alcuna argomentazione che tratti dei *requisiti a priori* per la possibilità di distanze definite [174].

172. Ho ora dimostrato, spero in modo conclusivo, che lo spazio sferico non solleva alcuna obiezione all'apriorità del mio assioma. Due punti qualsiasi hanno una relazione, la loro distanza, che è indipendente dal resto dello spazio, e questa relazione richiede, come sua misura, una curva determinata univocamente da quei due punti. Avrei potuto prendere il toro per le corna e dire: Due punti *possono* avere altra relazione se non quella data dalle linee che li uniscono, e quindi, se hanno una relazione indipendente dal resto dello spazio, deve esserci una linea che li unisce che essi determinano completamente. Così dice Giacomo [175]: "Così come, nel campo della quantità, la relazione tra due numeri è un altro numero, così nel campo dello spazio le relazioni sono fatti dello stesso ordine dei fatti che mettono in

relazione... Quando parliamo della relazione di direzione di due punti l'uno verso l'altro, intendiamo semplicemente la sensazione della linea che unisce i due punti.*La linea è la relazione*...La relazione di posizione tra i punti superiore e inferiore di una linea verticale è quella linea, e nient'altro."

Se avessi voluto usare questa dottrina fin dall'inizio, avrei potuto evitare tutta la discussione. Una relazione unica tra due punti *deve* , in questo caso, implicare una linea unica che li congiunga. Ma mi è sembrato meglio evitare una dottrina non universalmente accettata, tanto più che stavo affrontando la questione dal punto di vista logico e non psicologico. Dopo aver scartato le obiezioni, tuttavia, è interessante trovare questa conferma della teoria di cui sopra da una prospettiva così diversa. Credo infatti che la dottrina di James potrebbe essere dimostrata come una necessità logica, oltre che un fatto psicologico. Che tipo di cosa può essere una relazione spaziale tra due punti distinti? Deve essere qualcosa di spaziale e, poiché i punti sono interamente costituiti dalle loro relazioni, deve essere qualcosa di almeno altrettanto reale e tangibile quanto i punti che mette in relazione. Non sembra esserci nulla che possa soddisfare questi requisiti, se non una linea che li unisce. Quindi, ancora una volta, una relazione unica deve implicare una linea unica. Ovvero, la grandezza lineare è logicamente impossibile, a meno che lo spazio non permetta curve determinate univocamente da due qualsiasi dei loro punti.

173. (3) Ma inoltre, l'esistenza di curve determinate in modo univoco da due punti può essere dedotta dalla natura di qualsiasi forma diesternalità[176] . Infatti abbiamo visto, discutendo della Mobilità Libera, che questo assioma, insieme all'omogeneità e alla relatività della posizione, può essere dedotto in tal modo, e abbiamo visto all'inizio della nostra discussione sulla distanza, che l'esistenza di una relazione unica tra due punti poteva essere dedotta dall'omogeneità dello spazio. Poiché la posizione è relativa, possiamo dire che due punti qualsiasi devono avere*una qualche* relazione tra loro: poiché la nostra forma di esternalità è omogenea, questa relazione può rimanere invariata mentre i due punti si muovono nella forma,*cioè*cambiano le loro relazioni con altri punti; quindi la loro relazione reciproca è una relazione intrinseca, indipendente dalle loro relazioni con altri punti. Ma poiché la nostra formaèsemplicemente un complesso di relazioni, una relazione di esternalità deve apparire nella forma, con la stessa evidenza di qualsiasi altra cosa nella forma; Pertanto, se la forma è intuitiva o sensazionale, la relazione deve essere presentata immediatamente e non una mera inferenza. Di conseguenza, la relazione intrinseca tra due punti deve essere una figura univoca nella nostra forma,*ovvero,*in termini spaziali, la linea retta che unisce i due punti.

174. (4) Infine, dobbiamo dimostrare che l'esistenza di una tale curva porta necessariamente, quando la quantità è applicata alla relazione tra due punti, a un'unica grandezza, che quei due punti determinano completamente. Con ciò, saremo ricondotti alla distanza, da cui siamo partiti, e chiuderemo il cerchio del nostro argomento.

Abbiamo visto, nella sezione A § 119 , che la figura formata da due punti è proiettivamente indistinguibile da quella formata da due qualsiasi altri punti sulla stessa retta; la figura, in

entrambi i casi, è, dal punto di vista proiettivo, semplicemente la retta su cui giacciono i due punti. La differenza di relazione, nei due casi, non è qualitativa, poiché la geometria proiettiva non può occuparsene; tuttavia, esiste una qualche differenza di relazione. Ad esempio, se un punto viene mantenuto fisso mentre l'altro si muove, si verifica ovviamente un cambiamento di relazione. Questo cambiamento, poiché tutte le parti della retta sono qualitativamente simili, deve essere un cambiamento di quantità. Se, quindi, due punti determinano una figura unica, deve esistere, per la distinzione tra i vari altri punti di questa figura, un'unica relazione quantitativa tra i due punti determinanti e, quindi, poiché questi punti sono arbitrari, tra soli due punti. Questa relazione è *la distanza* , da cui è partita la nostra argomentazione e alla quale almeno ritorna.

175. In sintesi: se i punti sono definiti semplicemente dalle relazioni con altripunti, *cioè* se ogni posizione è relativa,*ogni punto deve avere con ogni altro punto una sola relazione, indipendente dal resto dello spazio. Questa relazione è la distanza tra i due punti.*Ora, una relazione tra due punti può essere definita solo da una linea che li unisce; anzi, si potrebbe sostenere che una relazione può*essere*una linea che li unisce. Quindi una relazione unica implica una linea unica,*cioè*una linea determinata da due qualsiasi dei suoi punti. Soloin unospazio che ammette una tale linea la grandezza lineare è un concetto logicamente possibile. Ma una volta stabilita la possibilità,*in generale*, di tracciare tali linee, e quindi di misurare grandezze lineari, potremmo scoprire che una certa grandezza ha una relazione peculiare con la costituzione dello spazio. La linea retta potrebbe risultare di lunghezza finita, e in questo caso la sua lunghezza darà una certa grandezza peculiare, la costante spaziale. Due punti antipodali, cioè punti che bisecano l'intera retta, avranno una relazione di grandezza che, pur non essendo alterata dal movimento, risulta peculiare per via di una certa relazione costante con il resto dello spazio. Questa peculiarità presuppone una misura di grandezza lineare in generale e non può, pertanto, invalidare l'assioma della retta. Tuttavia, per i punti che hanno tra loro la peculiare relazione antipodale, essa invalida l'argomentazione che dimostrava che la relazione tra due punti, essendo inalterata dal movimento, non poteva avere riferimento al resto dello spazio. È quindi comprensibile che, per tali punti particolari, l'assioma non sia più valido e che tra di essi sia possibile un numero infinito di rette; ma se non avessimo iniziato assumendo la validità generale dell'assioma, non avremmo mai potuto giungere alla conclusione che i punti antipodali fossero peculiari, né, in effetti, a una conclusione che ci avrebbe permesso di fornire una qualsiasi definizione quantitativa di punti particolari.

La distanza e la retta, in quanto relazioni determinate univocamente da due punti, sono dunque *a priori* necessarie alla geometria metrica. Ma, inoltre, sono proprietà che devono appartenere a qualsiasi forma di esternalità. Poiché la loro necessità per la geometria è stata dedotta dall'omogeneità e dalla relatività della posizione, e poiché queste sono proprietà necessarie di qualsiasi forma di esternalità, lo stesso argomento dimostra entrambe le conclusioni. Otteniamo così, come nel caso della libera mobilità, una doppia priorità: l'assioma della distanza, e la sua implicazione, l'assioma della retta, sono, da un lato, presupposti nella possibilità di una grandezza spaziale e non possono, quindi, essere

contraddetti da alcuna esperienza derivante dalla misurazione dello spazio; mentre sono conseguenze, dall'altro lato, delle proprietà necessarie di qualsiasi forma di esternalità che renda possibile l'esperienza di un mondo esterno.

176. In relazione alla retta, sarà opportuno discutere le condizioni di un sistema di coordinate metrico. Il sistema di coordinate proiettivo, come abbiamo visto, mira solo a una nomenclatura comoda per i diversi punti e può essere impostato senza introdurre la nozione di grandezza spaziale. Ma un sistema di coordinate metrico fa molto di più. Definisce ogni punto quantitativamente, attraverso le sue relazioni spaziali quantitative con una certa figura di coordinate. Solo quando il sistema di coordinate è quindi metrico,*cio*èquando ogni coordinata rappresenta una grandezza spaziale, che è a sua volta una relazione del punto definito con qualche altro punto o figura, le operazioni con le coordinate possono portare a un risultato metrico. Quando, come nella geometria proiettiva, le coordinate non sono grandezze spaziali, nessuna trasformazione può dare un risultato metrico. Voglio dimostrare, qui, che un sistema di coordinate metrico implica necessariamente la retta e non può, senza una fallacia logica, essere impostato su nessun'altra base. Il sistema di coordinate proiettivo, come abbiamo visto, è interamente basato sulla retta; ma il sistema metrico è più importante, poiché le sue grandezze incorporano informazioni concrete sulle grandezze spaziali, cosa che non avviene nella geometria proiettiva.

In primo luogo, le coordinate metriche di un punto costituiscono una definizione quantitativa completa dello stesso; ora, un punto può essere definito, come abbiamo visto, solo attraverso le sue relazioni con altri punti, e queste relazioni possono essere definite solo per mezzo della retta. Di conseguenza, qualsiasi sistema metrico di coordinate deve necessariamente includere la retta come base per la definizione dei punti.

Questo argomento *a priori* , tuttavia, sebbene io lo ritenga piuttosto valido, difficilmente convincerà chi è persuaso del contrario. Esaminiamo, pertanto, in dettaglio i sistemi di coordinate metriche e mostriamo, in ogni caso, la loro dipendenza dalla retta.

Abbiamo già visto che la nozione di distanza è impossibile senza la retta. Non possiamo, quindi, definire le nostre coordinate in nessuno dei modi ordinari, come distanze da tre piani, rette, punti, sfere o altro. Le coordinate polari sono impossibili, poiché, rinunciando alla rettilineità del raggio vettore, la lunghezza del raggio vettore perde di significato. Le coordinate triangolari implicano non solo angoli, che al limite devono essere rettilinei, ma anche rette, o comunque curve ben definite. Ora, le curve possono essere definite metricamente solo in due modi: *o* in relazione alla retta, come *ad esempio* la curvatura in un punto qualsiasi, *oppure* mediante equazioni puramente analitiche, che presuppongono un sistema intelligibile di coordinate metriche. Quali metodi rimangono per assegnare questi valori arbitrari a punti diversi? Anzi, come possiamo ottenere una stima della differenza – per evitare la nozione più specifica di distanza – tra due punti? La nozione stessa di punto è diventata illusoria. Quando disponiamo di un sistema di coordinate, possiamo definire un punto mediante le sue tre coordinate; in assenza di tale sistema, possiamo definire il concetto di punto *in generale* come l'intersezione di tre superfici o di due curve. Qui consideriamo superfici e curve come

concetti che l'intuizione ci suggerisce, ma se vogliamo che ci forniscano una definizione numerica precisa di punti *particolari* , dobbiamo specificare il tipo di superficie o di curva da utilizzare. Ora, come abbiamo visto, ciò è possibile solo se presupponiamo l'esistenza di una retta o di un sistema di coordinate. Ne consegue che ogni sistema di coordinate presuppone l'esistenza di una retta ed è logicamente impossibile senza di essa.

177. Abbiamo visto che i tre assiomi sopracitati sono *a priori* necessari alla geometria metrica. Non possono essercene altri necessari, poiché i sistemi metrici, logicamente inattaccabili come quello di Euclide, e che trattano spazi ugualmente omogenei e relazionali, sono stati costruiti dai metageometri senza l'ausilio di altri assiomi. I restanti assiomi della geometria euclidea – l'assioma delle parallele, l'assioma che il numero delle dimensioni sia tre e la forma euclidea dell'assioma della retta (due rette non possono racchiudere unospazio) –non sono essenziali alla possibilità della geometria metrica,*ovvero*non sono deducibili dal fatto che sia possibile una scienza delle grandezze spaziali. Essi vanno piuttosto considerati come leggi empiriche, ottenute, come le leggi empiriche di altre scienze, attraverso l'indagine effettiva della materia in esame – in questo caso, lo spazio esperito.

178. Riassumendo l'argomentazione principale di questa Sezione, possiamo darle una forma più generale e discutere le condizioni di misurazione in qualsiasi varietà continua,*ovvero*le qualità necessarie alla varietà affinché le quantità in essa possano essere determinate non solo in termini di maggiore o minore, ma anche in termini di*quantità*.

Possiamo affermare che la misurazione è l'applicazione del numero ai continui, o, se preferiamo, la trasformazione della semplice quantità in numero di unità. Utilizzando *la quantità* per indicare il vago "più o meno" e *la grandezza* per indicare il numero preciso di unità, il problema della misurazione può essere definito come la trasformazione della quantità in grandezza.

Un numero, innanzitutto, è un intero costituito da unità più piccole, tutte qualitativamente simili. Affinché una quantità continua possa essere espressa come un numero, essa deve, da un lato, essere essa stessa un intero e, dall'altro, essere divisibile in parti qualitativamente simili. Nell'aspetto di un intero, la quantità è *intensiva* ; nell'aspetto di un aggregato di parti, è *estensiva* . Una quantità puramente intensiva, quindi, non è numerabile; una quantità puramente estensiva, se mai se ne potesse immaginare una, non sarebbe affatto una singola quantità, poiché dovrebbe consistere di particolari del tutto non sintetizzati. Una quantità misurabile, quindi, è un intero divisibile in parti simili. Ma una quantità continua, se è divisibile, deve essere *infinitamente* divisibile. Altrimenti, i punti in cui potrebbe essere divisa formerebbero barriere naturali, distruggendone così la continuità. Inoltre, non è sufficiente che vi sia la possibilità di divisione in parti reciprocamente esterne; Mentre le parti, per essere percepibili come tali, devono essere reciprocamente esterne, esse, per essere conoscibili come parti *uguali* , devono anche essere capaci di superare la loro reciproca esternalità. Per questo, come abbiamo visto, è necessaria la sovrapposizione, che implica la libera mobilità e l'omogeneità: l'assenza di libera mobilità nel tempo, dove tutti gli altri requisiti di misurazione sono soddisfatti, rende impossibile la misurazione diretta del tempo. Pertanto, l'infinita

divisibilità, la libera mobilità e l'omogeneità sono necessarie per la possibilità di misurazione in *qualsiasi* varietà continua, e queste, come abbiamo visto, sono equivalenti ai nostri tre assiomi. Questi assiomi sono necessari, quindi, non solo per la misurazione spaziale, ma per ogni misurazione. L'unica varietà data dall'esperienza, in cui queste condizioni sono soddisfatte, è lo spazio. Ogni altra misurazione esatta – come si potrebbe dimostrare, credo, per ogni singolo caso – viene effettuata, come abbiamo visto nel caso del tempo, mediante la riduzione a un correlativo spaziale. Questo spiega l'importanza fondamentale, per la scienza esatta, della visione meccanicistica della natura, che riduce tutti i fenomeni a movimenti nel tempo e nello spazio. Il numero è, di tutte le concezioni, la più facile da gestire, e la scienza cerca ovunque un'opportunità per applicarlo, ma trova questa opportunità solo attraverso equivalenti spaziali dei fenomeni [177] .

179. Abbiamo ora visto in cosa consiste l' *elemento a priori* della geometria. Questo *a priori* può essere definito come gli assiomi comuni agli spazi euclidei e non euclidei, come gli assiomi deducibili dalla concezione di una forma di esternalità, o – nella geometria metrica – come gli assiomi necessari per la possibilità di misurazione. Resta da discutere,in uncapitolo finale, alcune questioni di natura filosofica più generale, nelle quali dovremo abbandonare il solido terreno della matematica ed addentrarci in speculazioni che presento in modo molto provvisorio e con poca fiducia nella loro validità finale. Le questioni principali di questo capitolo finale saranno due: (1) Come è possibile una tale *a priori* e puramente logica, applicata a un oggetto di studio effettivamente dato come lo spazio? (2) Come possiamo eliminare le contraddizioni che ci hanno tormentato in questo capitolo, derivanti dalla relatività, dall'infinita divisibilità e dall'estensione illimitata dello spazio? Questi due interrogativi ci vengono imposti dal presente capitolo, ma poiché sollevano alcuni dei problemi fondamentali della filosofia, sarebbe avventato aspettarsi una risposta conclusiva o pienamente soddisfacente. Si possono sperare in qualche spunto e suggerimento, ma una soluzione completa potrebbe essere ottenuta solo da una filosofia completa, le cui prospettive sono fin troppo esigue per infondere un atteggiamento di fiducia.

NOTE A PIÈ DI PAGINA:

[116] Vedere infra, Assioma della distanza, nella sezione B di questo capitolo.

[117] Pertanto, su un cilindro, due geodetiche, *ad esempio* una generatrice e un'elica, possono avere un numero qualsiasi di intersezioni, una differenza molto importante rispetto al piano.

[118] Cfr. Cremona, Geometria proiettiva (Clarendon Press, 2ª ed. 1893) p. 50: "La maggior parte delle proposizioni negli Elementi di Euclide sono metriche, e non è facile trovare tra di esse un esempio di teorema puramente descrittivo." [119] Op. cit. p. 226.

[120] Alcuni motivi per questa scelta appariranno quando arriveremo alla geometria metrica.

[121] La retta *σa* denota la retta comune ai piani *σ* e *a* , il punto *σa* denota il punto comune al piano *σ* e alla retta *a* , e analogamente per il resto della notazione.

[122] Cremona (op. cit. Cap. IX. p. 50) definisce il rapporto anarmonico come una proprietà metrica che non viene alterata dalla proiezione. Ciò, tuttavia, distrugge l'indipendenza logica della geometria proiettiva, che può essere mantenuta solo da una definizione puramente descrittiva.

[123] Non esiste una proprietà corrispondente di *tre* punti su una retta, perché essi possono essere trasformati proiettivamente in qualsiasi altro tre punti sulla stessa retta. Vedi § 120.

[124] A causa della “Geometrie der Lage” di v. Staudt.

[125] Cfr. Cremona, op. cit. Capitolo VIII.

[126] Le definizioni corrispondenti, per la varietà bidimensionale delle rette passanti per un punto, seguono dal principio di dualità.

[127] È importante osservare che questa definizione del Punto introduce idee metriche. Senza idee metriche, abbiamo visto, nulla sembra dare al Punto la precedenza della retta, o addirittura distinguerlo concettualmente dalla retta. Un riferimento alla quantità è quindi inevitabile nella definizione del Punto, se la definizione deve essere geometrica. Una definizione non metrica dovrebbe essere anche non geometrica. Vedi Cap . IV, §§ 196-199 .

[128] §§ 163–175.

[129] Su questo assioma, tuttavia, confronta il § 131.

[130] Per la dimostrazione di questa proposizione, vedere Cap . III, Sez . B , Assioma delle dimensioni.

[131] La retta e il piano, in tutte le discussioni di geometria generale, non sono necessariamente euclidei. Sono semplicemente figure determinate, in generale, rispettivamente da due e da tre punti; se si conformano all'assioma delle parallele e alla forma euclidea dell'assioma della retta, non deve essere considerato nella definizione generale.

[132] Che la geometria proiettiva debba avere un significato esistenziale, tenterò di dimostrarlo nel Capitolo

IV.

[133] Logica, Libro I. Capitolo II.

[134] Cfr. Logica di Bradley, p. 63. Si vedrà che il senso in cui ho parlato dello spazio come principio di differenziazione non è il senso di un “principio di individuazione” a cui Bradley si oppone.

[135] Cap . IV. §§ 186–191.

[136] Cap . IV. § 201 e segg.

[137] È importante osservare, tuttavia, che questo modo di considerare le relazioni spaziali è metrico; dal punto di vista proiettivo, la relazione tra due punti è l'intera linea retta illimitata su cui giacciono, e non deve essere considerata divisibile in parti o come costruita di punti.

[138] §§ 207 , 208 . Cfr. Hegel, Filosofia della natura, § 254.

[139] Vedere Cap . IV . §§ 196–199.

[140] Si veda un articolo di prossima pubblicazione su "Le relazioni tra numero e quantità" del presente autore su Mind, luglio 1897.

[141] Logica, Vol. II. Cap. VII. p. 211.

[142] Si intende ovunque una diversità reale, in contrapposizione a quella logica. Diversi aspetti possono coesistere in una cosa in un dato momento e luogo, ma due cose reali diverse non possono coesistere allo stesso modo.

[143] Sull'insufficienza del solo tempo, vedere il capitolo IV , § 191.

[144] Geometricamente, l'assioma del piano non è che tre punti determinino una figura , come segue dall'assioma della retta, ma che la retta che unisce due punti casuali del piano giace interamente nel piano. Questo assioma richiede un metodo proiettivo per costruire il piano, *cioè* per trovare tutte le triadi di punti che determinano la stessa figura proiettiva della triade data. La costruzione richiesta si otterrà se possiamo trovare una qualsiasi figura proiettiva determinata da tre punti e un qualsiasi metodo proiettivo per raggiungere altri punti che determinano la stessa figura.

Siano *O* , *P* e *Q* i tre punti di cui si richiede la relazione proiettiva. Abbiamo quindi a disposizione le tre rette *PQ* , *QO* e *OP* . Metricamente, la relazione tra questi punti è data dall'area e dalla grandezza dei lati e degli angoli del triangolo *OPQ* , proprio come la relazione tra due punti è la distanza. Ma proiettivamente, la figura rimane invariata quando *P* e *Q* si muovono lungo *OP* e *OQ* , o quando *OP* e *OQ* ruotano attorno a *O* in modo da incontrare ancora *PQ* . Questo è il risultato del principio generale di equivalenza proiettiva enunciato sopra (§§ 108 , 109). Pertanto, la relazione proiettiva tra *O* , *P* e *Q* è la stessa di quella tra *O* , *p* e *q* o *O* , *P′* e Q ′ ; vale a dire, *p e q* , e *P′* e *Q′* giacciono sul piano *OPQ* . In questo modo, è possibile ottenere un numero qualsiasi di punti sul piano e, ripetendo la costruzione con nuove terne, si può raggiungere ogni punto del piano. Dobbiamo dimostrare che, quando il piano è costruito in questo modo, la retta che unisce due punti qualsiasi del piano giace interamente sul piano stesso.

Dal modo in cui è stata eseguita la costruzione, è evidente che qualsiasi punto di *PQ* , *OP* , *OQ* , *OP′* o *OQ′* giace sul piano. Se riusciamo a dimostrare che qualsiasi punto di *pq* giace sul piano, avremo dimostrato tutto ciò che è richiesto, poiché *pq* può essere trasformato, mediante successive ripetizioni della stessa costruzione, in qualsiasi retta che congiunga due punti del piano. Ma abbiamo visto che lo stesso piano è determinato da *O* , *p* , *q* e da *O* , *P* , *Q*.

Le rette *PQ* e *pq* hanno, quindi, la stessa relazione con il piano. Ma *PQ* giace interamente sul piano; quindi anche *pq* giace interamente sul piano. Pertanto il nostro assioma è dimostrato.

[145] Una dimostrazione dettagliata è stata fornita sopra, Cap. I. 3° periodo. Si osserva che qualsiasi riferimento a elementi infinitamente distanti implica idee metriche.

[146] Cfr. Sezione A, §§ 115–117.

[147] Confronta Erdmann, op. cit. p. 138.

[148] Cfr. Erdman, op. cit. P. 164.

[149] A rigor di termini, questo metodo è applicabile solo quando le due grandezze sono commensurabili. Ma se consideriamo rigidamente la divisibilità infinita, le unità possono teoricamente essere prese così piccole da ottenere qualsiasi grado di approssimazione richiesto. La difficoltà è quella universale di applicare ai continui la concezione essenzialmente discreta del numero.

[150] Cfr. Erdman, op. cit. P. 50.

[151] Chiamato anche assioma di congruenza. Ho preso la congruenza come la *definizione* di uguaglianza spaziale per sovrapposizione, e quindi in generale mi riferirò all'assioma *come* a Mobilità Libera.

[152] Per il senso in cui queste cifre devono essere considerate materiali, si veda la critica di Helmholtz, Capitolo II , §§ 69 ss .

[153] Op. cit. p. 60.

[154] La visione di Helmholtz e Erdmann, secondo cui l'esperienza meccanica è sufficiente in questo caso, sebbene l'esperienza geometrica non lo sia, è stata discussa sopra, Capitolo II , §§ 73 , 82 .

[155] Capitolo II . § 81. [156] Capo II . §72 .

[157] Confronta Delbœuf, L'ancienne et les nouvelles géométries, II. Rev. Phil. 1894, vol. xxxvii. P. 354.

[158] Prolegomeni, § 13. Vedi il Commentario di Vaihinger, II, pp. 518–532, in particolare pp. 521–2. Quanto sopra rappresentava l'intero scopo di Kant nel 1768, ma solo una parte del suo scopo nei Prolegomeni, dove si doveva anche dimostrare la natura intuitiva dello spazio.

[159] In merito alla misurazione del tempo, cfr. Logica di Bosanquet, vol. I, pp. 178-183. Poiché il tempo, nella suddetta trattazione, è misurato dal movimento, la sua misurazione presuppone quella delle grandezze spaziali.

[160] Cfr. Stumpf. Ursprung der Raumvorstellung, pag. 68.

[161] Come è anche l'altro assioma di Helmholtz, la possibilità di sovrapposizione è indipendente dal percorso seguito per realizzarla.

[162] Cfr. §§ 129 , 130.

[163] Questa deduzione è praticamente la stessa di quella della Sez. A, ma l'ho esposta qui con un riferimento più specifico allo spazio e alla geometria metrica.

[164] La domanda: "Relazioni con cosa?" è una domanda che comporta molte difficoltà. Verrà trattata più avanti in questo capitolo e, per quanto possibile, verrà risolta nel quarto capitolo. Per ora, nonostante l'evidente circolo vizioso, prenderò le relazioni come relazioni con altre posizioni.

[165] Sap. Abh. vol. II. P. 614.

[166] Cfr. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, 2a ed. P. XXIII.

[167] Delbœuf, è vero, parla di geometrie con *m* / *n* dimensioni, ma non fornisce alcun riferimento (Rev. Phil. T. xxxvi. p. 450).

[168] Nel criticare Erdmann, si ricorderà, abbiamo visto che la libera mobilità è una proprietà necessaria delle sue estensioni, sebbene egli non la consideri tale.

[169] Cfr. Riemann, Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, Gesammelte Werke, p. 266; anche Erdmann, op. cit. P. 154.

[170] Ciò è soggetto, nello spazio sferico, alla modifica indicata di seguito, nel trattare l'eccezione all'assioma della retta. Vedere §§ 168–171.

[171] Parlando della distanza sia come quantità che come relazione intrinseca, sono ansioso di evitare un'apparente incoerenza. Ho parlato del giudizio di quantità, in tutto il testo, come di un confronto; come può dunque una quantità essere intrinseca? La risposta è che, sebbene la misurazione e il giudizio di quantità esprimano il risultato del confronto, tuttavia i termini confrontati devono esistere prima del confronto; in questo caso, i termini confrontati nella misurazione delle distanze, *cioè* nel loro confronto *tra loro* , sono relazioni intrinseche tra punti. Quindi, sebbene la *misurazione* della distanza implichi un riferimento ad altre distanze, e la sua espressione come grandezza richieda tale riferimento, tuttavia la sua esistenza non dipende da alcun riferimento esterno, ma esclusivamente dai due punti di cui è la distanza. [172] Si veda la fine dell'argomentazione sulla libera mobilità, § 155 ss.

[173] Nell'opera di Frischauf "Absolute Geometrie nach Johann Bolyai", Anhang, si trova una serie di definizioni, a partire dalla sfera, come luogo delle coppie di punti congruenti quando un punto della coppia è fissato, ottenendo così il cerchio e la retta. Da quanto sopra segue che la sfera così definita implica già una curva tra i punti della coppia di punti, mediante la quale si possono conoscere diverse coppie di punti come congruenti; e sembrerà, procedendo, che questa curva debba essere una retta. La definizione di Frischauf per mezzo della sfera implica, quindi, un circolo vizioso, poiché la sfera presuppone la retta come criterio di congruenza delle coppie di punti.

[174]

Né in alcun argomento che, come quelli della geometria proiettiva, eviti del tutto la nozione di grandezza o distanza. Ne consegue che le proposizioni della geometria proiettiva si applicano, senza riserve, allo spazio sferico, poiché l'eccezione all'assioma della retta si presenta solo in ambito metrico.

[175] Psicologia, Vol. II. pp. 149–150.

[176] Questo passaggio dell'argomentazione è stato esposto in modo molto conciso, poiché si tratta di una mera ripetizione dell'argomentazione corrispondente nella Sezione A, ed è inserito qui solo per completezza logica. Vedi § 137 ss.

[177] Cfr. Hannequin, Essai critique sur l'hypothèse des atomes, Parigi, 1895, passim.

CAPITOLO IV.

CONSEGUENZE FILOSOFICHE.

180. Nel presente capitolo, dobbiamo discutere due questioniche, sebbenedi scarsa rilevanza geometrica, rivestono un'importanza fondamentale per la teoria della geometria esposta sopra. La prima di queste questioni è la seguente: quale relazione può avere una dimostrazione puramente logica e deduttiva, come quella sulla natura di una forma di esternalità, con un oggetto di studio esperienziale come lo spazio? Si potrebbe obiettare che avete semplicemente formulato una concezione generale, che include lo spazio come una specie particolare, e avete poi dimostrato, ciò che avrebbe dovuto essere ovvio fin dall'inizio, che questa concezione generale conteneva alcuni degli attributi dello spazio. Ma quale fondamento offre questo per considerare questi attributi come*a priori*? La concezione di mammifero possiede alcuni degli attributi di un cavallo; ma questi attributi sono quindi*a priori*aggettivi del cavallo? La risposta a questa ovvia obiezione è così complessa e implica così tanta filosofia generale che l'ho riservata a un capitolo finale, per non interrompere la trattazione di argomenti specificamente geometrici.

181. Ho già indicato, in termini generali, il fondamento per considerare*a priori* le proprietà di qualsiasi forma di esternalità. Questo fondamento è trascendentale,*cio*èsi trova nelle condizioni necessarie per la possibilità dell'esperienza. La forma di esternalità, come le varietà di Riemann, è una concezione di classe generale, che include il tempo così come gli spazi euclidei e non euclidei. Non è motivata, tuttavia, come le varietà, da una*quantitativa* con lo spazio, ma dal fatto che, se ha più di una dimensione, assolve tutte quelle funzioni che, nel nostro mondo reale, sono assolte dallo spazio. Ma una forma di esternalità, per realizzare ciò, non deve essere una mera concezione, bensì un'intuizione effettivamente esperita. Quindi la concezione di tale forma è la*concezione*, che contiene in sé ogni*intuizione*che può assolvere alla funzione effettivamente assolta dallo spazio. E questa funzione è quella di

rendere possibile l'esperienza di cose diverse ma interrelate. Una qualche forma di percezione sensoriale, la cui concezione è inclusa nella nostra forma di esteriorità, è dunque*a priori*necessaria all'esperienza della diversità nelle relazioni, e senza questa esperienza, come dimostra la logica moderna, non avremmo alcuna esperienza. Ciò lascia comunque inalterata la relazione tra l' *a priori* e il soggettivo: la forma di esteriorità è necessaria all'esperienza, ma non*per questo motivo*può essere dichiarata puramente soggettiva. Certo, la necessità dell'esperienza può derivare solo dalla natura della mente che esperisce; ma non ne consegue che le condizioni necessarie potrebbero essere soddisfatte, a meno che il mondo oggettivo non possieda determinate proprietà. Il*fondamento*della necessità, possiamo affermare con certezza, deriva dalla mente; ma non ne consegue affatto che la*verità*di ciò che è necessario dipenda solo dalla costituzione della mente. Laddove ciò non accada, la nostra conclusione, quando una conoscenza è stata dichiarata*a priori*, può essere solo: a causa della costituzione della*mente*, l'esperienza sarà impossibile a meno che il*mondo*non accetti certi aggettivi.

Questo, a grandi linee, sarà l'argomento della prima parte di questo capitolo, e tale sarà la giustificazione per considerare a *priori* quegli assiomi della geometria che sono stati dedotti sopra dalla concezione di una forma di esteriorità. Infatti, questi assiomi, e solo questi, sono necessariamente veri per qualsiasi mondo in cui l'esperienza è possibile.

182 [178] **.** La visione proposta ha, ovviamente, molto in comune con quella dell'Estetica trascendentale. Anzi, credo che si possa ottenere nella sua interezza attraverso una certa limitazione e interpretazione degli argomenti classici di Kant. Ma poiché differisce, in molti punti importanti, dalle conclusioni a cui mirava Kant, e poiché la concordanza può facilmente sembrare maggiore di quanto non sia, inizierò con un breve confronto e cercherò, facendo riferimento a critiche autorevoli, di stabilire la legittimità della mia divergenza da lui.

183. In primo luogo, l'elemento psicologico è molto più rilevante nella tesi di Kant che nella mia. Sosterrò, è vero, che una forma di esteriorità, per poter svolgere la sua funzione, non deve essere una mera concezione o una mera inferenza, ma deve essere un elemento dato nella percezione sensoriale, non, ovviamente, originariamente dato in isolamento, ma scopribile, attraverso l'analisi, prestando attenzione all'oggetto dellapercezione sensoriale [179] . Ma Kant sosteneva non solo che questo elemento è dato, ma anche che è soggettivo. Lo spazio, per lui, non è, da un lato, concettuale, ma dall'altro, non sensoriale. Non costituisce, per lui, parte dei dati dei sensi, ma viene aggiunto da un'intuizione soggettiva, che egli considera non solo logicamente, ma anche psicologicamente, precedente agli oggetti nellospazio [180] .

Questa parte dell'argomentazione di Kant è del tutto irrilevante per noi. Che una forma di esternalità sia data nel senso o in una pura intuizione, per noi non ha importanza, poiché trascuriamo la questione della connessione tra l' *à priori* e il soggettivo; mentre la priorità temporale dello spazio rispetto agli oggetti in esso contenuti è stata generalmente riconosciuta come irrilevante per l'epistemologia, ed è stata spesso considerata come non facente parte della tesi di Kant [181] . Se chiamiamo intuizionale tutto ciò che è dato nella

percezione sensoriale, allora possiamo sostenere che una forma di esternalità deve essere intuizionale; ma che si tratti di una pura intuizione, nel senso di Kant, o meno, è irrilevante per noi, così come la sua priorità rispetto agli oggetti in esso contenuti.

Che la natura non sensoriale dello spazio non sia parte essenziale dell'insegnamento *logico* di Kant , appare evidente da un esame del suo argomento. Egli ha fatto, nell'introduzione, la distinzione puramente logica tra materia e forma, ma ha dato a questa distinzione, nel momento stesso in cui la suggerisce, un'implicazione psicologica. Ciò fa affermando che la forma, in cui è ordinata la materia delle sensazioni, non può essere essa stessa sensoriale. Da questo presupposto segue, naturalmente, che lo spazio non può essere sensoriale. Ma il presupposto è totalmente privo di supporto argomentativo, essendo presentato, apparentemente, come un assioma autoevidente; è stato severamente criticato da Stumpf [182] e altri [183] , ed è stato descritto da Vaihinger come una fatale *petitio principii* [184] ; è irrilevante per l'argomento logico, quando questo argomento è separato, come lo abbiamo separato, da ogni connessione con la soggettività psicologica; E infine, ci rende preda delle teorie psicologiche dello spazio, che ultimamente sembrano poco favorevoli alla pura dottrina kantiana.

184. Abbiamo dunque il diritto, in un'indagine epistemologica, di trascurare l'insegnamento psicologico di Kant – almeno nella misura in cui distingue l'intuizione spaziale dalla sensazione – e di concentrarci piuttosto sul solo aspetto logico. Quella parte del suo insegnamento psicologico che sostiene che lo spazio non è una mera concezione è, con alcune limitazioni, sufficientemente evidente se applicata allo spazio reale; ma per noi deve essere trasformata in una tesi ben più complessa, ovvero che*nessuna*forma di esteriorità, che renda possibile l'esperienza della diversità nelle relazioni, può essere meramente concettuale. Questa questione, alla quale torneremo in seguito, non è più psicologica, ma appartiene interamente all'epistemologia.

185. Che cosa rimane dunque, ai nostri fini, il nucleo del primo argomento di Kant a favore dell'apriorità dello spazio? Il suo argomento, nella forma in cui lo presentò, riguarda la proiezione eccentrica delle sensazioni. Affinché io possa riferire le sensazioni, egli afferma, a qualcosa di esterno a me, devo già possedere nella mente la forma spaziale soggettiva. In questa forma, come fa notare Vaihinger (Commentar,II,pp. 69, 165), l'argomento si basa su una*petitio principii*, poiché solo se le sensazioni sono necessariamente non spaziali la loro proiezione richiede una forma spaziale soggettiva. Ma, inoltre, l'apriorità logica dello spazio riguarda forse l'esteriorità delle cose rispetto a noi stessi?

Lo spazio *sembra* svolgere due funzioni: da un lato, rivela le cose, attraverso la proiezione eccentrica delle sensazioni, come esterne al sé, mentre, dall'altro, rivela le cose presentate simultaneamente come reciprocamente esterne. Queste due funzioni, sebbene spesso trattate come coordinate e quasi equivalenti [185] , mi sembrano molto diverse. Prima di discutere l'priorità dello spazio, dobbiamo distinguere attentamente, credo, tra queste due funzioni e decidere su quale di esse dobbiamo argomentare.

Ora, l'esteriorità al Sé, sembrerebbe, deve necessariamente sollevare l'intera questione della natura e dei limiti dell'Io, e per di più, non può essere derivata dalla presentazione spaziale, a meno che non si attribuisca al Sé una posizione definita nello spazio. Ma le cose acquisiscono una posizione nello spazio solo quando possono apparire nella percezione sensoriale; siamo quindi costretti, se adottiamo questa visione della funzione dello spazio, a considerare il Sé come un fenomeno presentato alla percezione sensoriale. Ma questo riduce l'esteriorità al Sé all'esteriorità al corpo. Il corpo, tuttavia, è un oggetto presentato come qualsiasi altro, e l'esteriorità degli oggetti verso di esso è, quindi, un caso speciale della reciproca esteriorità delle cose presentate. Pertanto non possiamo considerare lo spazio come qualcosa che attribuisce, in primo luogo in ogni caso, esteriorità al Sé, ma solo la reciproca esteriorità delle cose presentate alla percezione sensoriale [186].

186. Questo, dunque, è il tipo di esteriorità che ci aspettiamo dallospazio, ela nostra domanda deve essere: l'esistenza di cose diverse ma interrelate sarebbe inconoscibile se non ci fosse, nella percezione sensoriale, una qualche forma di esteriorità? Questa è la questione cruciale, da cui dipende l'importanza della nostra forma, e quindi degli assiomi necessari della geometria.

187. L'argomento contrario al mio, quello che va dall'elemento spazio-temporale nella percezione a un mondo di cose interrelate ma diverse, è sviluppato ampiamente nella Logica di Bradley. Viene riassunto brevemente nella seguente frase (p. 44, nota): "Se lo spazio e il tempo sono continui, e se ogni apparenza deve occupare un tempo o uno spazio – e non è difficile sostenere entrambe queste*tesi*– possiamo subito giungere alla conclusione chenonesiste un mero particolare. Ogni fenomeno esisterà in più tempi o spazi di uno; e contro questa diversità ci sarà di per sé ununiversale [187] ". L'importanza di questo fatto appare evidente se consideriamo che, se esistesse un*mero*particolare, ogni giudizio e inferenza su quel particolare sarebbero impossibili, poiché ogni giudizio e inferenza operano necessariamente per mezzo dell'universale. Ma tutta la realtà è costruita a partire dal*Questo*di presentazione immediata, dal quale necessariamente scaturiscono il giudizio e l'inferenza. A causa, tuttavia, della continuità e della relatività dello spazio e del tempo, nessun*Questo*può essere considerato né semplice né autosufficiente. Ogni*Questo*, da un lato, può essere analizzato in*Questi*, e dall'altro, si scopre che è necessariamente correlato ad altre cose, al di fuori dei limiti del dato oggetto di percezione sensoriale. Questa funzione dello spazio e del tempo è presupposta nella seguente affermazione tratta dalla Logica di Bosanquet (Vol.I, pp. 77-78): "La realtà mi è data*nella* presente percezione sensoriale e*nell'immediata* sensazione della mia stessa esistenza senziente che l'accompagna. Il mondo reale, come sistema organizzato definito, è*per me*un'estensione di questa presente sensazione e autopercezione per mezzo del giudizio, ed è l'essenza del giudizio realizzare e sostenere tale estensione... Il soggetto in ogni giudizio di Percezione è un dato punto o luogo in contatto sensoriale con il sé percettivo. Ma, poiché tutta la realtà è continua, il soggetto non è*semplicemente* questo dato punto o luogo."

188. Questa dottrina di Bradley e Bosanquet è l'opposto della dottrina epistemologica che devo sostenere. Essi affermano che, grazie alla continuità e alla relatività dello spazio e del tempo, siamo in grado di costruire un mondo sistematico, mediante giudizio e inferenza, a partire da quell'esistenza frammentaria eppure necessariamente complessa che è data dalla percezione sensoriale. La mia tesi è, al contrario, che poiché ogni conoscenza è necessariamente derivata da un'estensione del*Questo*della percezione sensoriale, e poiché tale estensione è possibile solo se il*Questo*ha quel carattere frammentario eppure complesso conferito da una forma di esternalità, ne consegue che una qualche forma di esternalità, data con il*Questo*, è essenziale a ogni conoscenza, ed è quindi logicamente*a priori*.
L'argomentazione di Bradley, se corretta, dimostra già questa tesi; infatti, mentre da un lato egli non usa proprietà dello spazio e del tempo se non quelle che appartengono a ogni forma di esternalità, dall'altro dimostra che il giudizio e l'inferenza richiedono che il*Questo*non sia né singolo né autosufficiente. Ma cercherò, dato che il punto è di fondamentale importanza, di riprodurre la dimostrazione,in unaforma più adatta alla questione epistemologica rispetto a quella di Bradley.

189. L'essenza della mia tesi è che, affinché l'esperienza sia possibile, ogni*Questo*, quando oggetto di attenzione, deve risultare, da un lato, risolvibile in*Questi*, e dall'altro dipendente, per alcuni dei suoi aggettivi, da un riferimento esterno. La seconda di queste tesi deriva dalla prima, poiché se prendiamo uno dei*Questi*contenuti nel primo*Questo*, otteniamo un nuovo*Questo*necessariamente correlato agli altri*Questi*checostituiscono*Questo*originale. Posso, pertanto, limitarmi alla prima proposizione, la quale afferma che l'oggetto della percezione deve contenere una diversità, non solo di contenuto concettuale, ma anche di esistenza, e che questa può essere conosciuta solo se la percezione sensoriale contiene, come elemento, una qualche forma di esteriorità.

La mia premessa, in questa argomentazione, è che ogni conoscenza implica il riconoscimento della diversità nelle relazioni, o, se preferiamo, dell'identità nella differenza. Accetto questa premessa dalla Logica, in quanto risultante dall'analisi del giudizio e dell'inferenza. Per dimostrare tale premessa, sarebbe necessario un trattato di Logica; devo quindi rimandare il lettore alle opere di Bradley e Bosanquet sull'argomento. Dalla mia premessa segue immediatamente che la conoscenza sarebbe impossibile, a meno che l'oggetto dell'attenzione non possa essere complesso, *cioè* non un *mero* particolare. Ora, potrebbe l'oggetto mentale – *cioè* , in questo contesto, l'oggetto di una conoscenza – essere complesso, se l'oggetto della percezione immediata fosse sempre semplice?

190. A prima vista, potremmo essere inclini a rispondere affermativamente a questa domanda. Ma diverse difficoltà, credo, impedirebbero una tale risposta. In primo luogo, la conoscenza deve partire dalla percezione. Quindi, o non potremmo avere alcuna conoscenza se non della nostra percezione attuale, oppure dovremmo essere in grado di contrapporla e confrontarla con qualche altra percezione. Ora, nel primo caso, poiché la percezione attuale, per ipotesi, è un mero particolare, la conoscenza di essa è impossibile, secondo la nostra premessa. Ma nel secondo caso, l'altra percezione, con cui confrontiamo la nostra prima,

deve essersi verificata in un altro momento, e con il tempo, abbiamo subito una forma di esternalità. Ma quel che è più importante, la nostra percezione attuale non è più un mero particolare. Infatti, la possibilità di confrontarla con un'altra percezione implica un punto di identità tra le due, e quindi rende entrambe complesse. Inoltre, il tempo deve essere continuo, e il presente, come sottolinea Bradley,nonun semplice punto neltempo[188]. Pertanto, la nostra percezione attuale racchiude la complessità insita nella durata all'interno del presente illusorio: la sua mera particolarità e la sua semplicità si perdono. Si perde anche la sua autosufficienza, poiché al di là del presente illusorio si trovano il passato e il futuro, ai quali la nostra percezione attuale ci rimanda inevitabilmente. Il tempo, dunque, è essenziale per quell'identità nella differenza che ogni conoscenza postula.

191. Ma da tutto ciò non abbiamo tratto alcun fondamento per affermare una molteplicità di cose reali, o una forma di esternalità multidimensionale, che, come abbiamo visto, era necessaria per la verità di due dei nostri tre assiomi. Ciò ci porta alla domanda: abbiamo a disposizione, con il solo tempo come forma di esternalità, elementi sufficienti per la possibilità della conoscenza?

A questa domanda dobbiamo, credo, rispondere negativamente. Con il solo tempo, abbiamo visto, il nostro oggetto presentato deve essere complesso, ma la sua complessità deve, se posso usare tale espressione, essere meramente aggettivale. Senza una seconda forma di esteriorità, solo una cosa può essere data in un dato momento[189], e questa unica cosa, quindi, deve costituire l'intero nostro mondo. L'oggetto della percezione passata deve – poiché la nostra unica cosa non ha nulla di esterno a sé, mediante il quale potrebbe essere creata o distrutta – essere considerato come la stessa cosa in uno stato diverso. La complessità, quindi, risiederà solo negli stati mutevoli della nostra unica cosa – sarà aggettivale, non sostanziale. Inoltre abbiamo il seguente dilemma: o l'unica cosa deve essere noi stessi, oppure l'autocoscienza non potrebbe mai sorgere. Ma la difficoltà principale di un mondo simile risiederebbe nei cambiamenti della cosa. Cosa potrebbe causare questi cambiamenti, dal momento che non conosceremmo nulla di esterno alla nostra cosa? Sarebbe come una monade leibniziana, senza alcun Dio esterno che prepari i suoi cambiamenti. In un mondo del genere, il nesso di causalità non potrebbe essere applicato e il cambiamento risulterebbe del tutto inspiegabile.

Pertanto, abbiamo bisogno anche della possibilità di una diversità di cose che coesistono simultaneamente, non solo di aggettivi successivi; e questo, come abbiamo visto, non può essere dato dal solo tempo, ma solo da una forma di esternalità per parti simultanee di una presentazione. In altre parole, non potremmo mai dedurre l'esistenza di cose diverse ma interrelate, a meno che l'oggetto della percezione sensoriale non possa avere una complessità sostanziale, e per tale complessità abbiamo bisogno di una forma di esternalità diversa dal tempo. Tale forma, inoltre, come è stato dimostrato nel Capitolo III , Sezione A (§ 135) , può assolvere alle sue funzioni solo se ha più di una dimensione. Nel nostro mondo reale, questa forma è data dallo spazio; in qualsiasi mondo, conoscibile da esseri con le

nostre leggi del pensiero, una forma simile, come abbiamo ora visto, deve essere data nella percezione sensoriale.

Questo argomento può essere brevemente riassunto, assumendo la dottrina di Bradley, secondo cui tutta la conoscenza si ottiene per inferenza dal *Questo* della percezione sensoriale. Infatti, se così fosse, il *Questo* —affinché l'inferenza, che dipende dall'identità nella differenza, sia possibile — dovrebbe essere esso stesso complesso e, in fase di analisi, rivelare aggettivi che hanno un riferimento al di là di sé stesso. Ma questo, come dimostrato in precedenza, può accadere solo per mezzo di una forma di esternalità. Ciò stabilisce gli assiomi a priori della geometria, come aventi necessariamente un significato e una validità esistenziale in qualsiasi mondo intelligibile.

192. Spero che l'argomentazione di cui sopra abbia chiarito perché ritengo possibile dedurre, da una mera concezione come quella di una forma di esteriorità, l'apriorità logica di certi assiomi riguardo allo spazio esperienziale. L'argomentazione kantiana – che era corretta, se il nostro ragionamento è stato fondato, nell'affermare che la reale diversità, nel nostro mondo attuale, potrebbe essere conosciuta solo con l'aiuto dello spazio – era errata, nella misura in cui si estende il suo ambito puramente logico, solo nel trascurare la possibilità di altre forme di esteriorità che, se esistessero, potrebbero svolgere lo stesso compito con pari efficacia. Nella misura in cui lo spazio differisce, quindi, da queste altre concezioni di possibili forme intuitive, esso è un mero fatto esperienziale, mentre nella misura in cui le sue proprietà sono quelle che tutte queste forme devono avere, esso è*a priori*necessario alla possibilità dell'esperienza.

Non posso tuttavia sperare che, per il lettore, non sussistano difficoltà in una simile deduzione, a partire da concetti astratti, delle proprietà di un *dato* reale nella percezione sensoriale. Consideriamo, ad esempio, una proprietà come l'impenetrabilità. Supporre che due cose si trovino simultaneamente nella stessa posizione, in una forma di esteriorità, è una contraddizione logica; ma possiamo dire lo stesso dello spazio e del tempo reali? L'impossibilità, in questo caso, non è forse una questione di esperienza piuttosto che di logica? Non se l'argomentazione precedente è stata corretta, rispondo. Perché in tal caso, deduciamo la diversità reale, *cioè* l'esistenza di cose diverse, solo dalla differenza di posizione nello spazio o nel tempo. Ne consegue che supporre che due cose si trovino nello stesso punto dello spazio e del tempo è ancora una contraddizione logica: non perché abbiamo costruito i dati del senso a partire dalla logica, ma perché la logica, per quanto riguarda la sua applicazione, dipende dalla natura di questi dati. Questo esempio illustra, e ci tengo a precisarlo, che la mia argomentazione non ha tentato di costruire la ricchezza vitale della percezione sensoriale a partire da "categorie inanimate", ma solo di sottolineare che, a meno che la percezione sensoriale non contenga un certo elemento, queste categorie sarebbero impotenti a comprenderlo.

193. Come spiegare la fortunata realizzazione di questi requisiti – sia essa dovuta a un'armonia prestabilita, all'adattamento darwiniano al nostro ambiente, alla soggettività dell'elemento necessario nella percezione sensoriale, o a un'identità e unità fondamentale tra

noi stessi e il resto della realtà – è un'ulteriore questione, che appartiene più alla metafisica che alla nostra attuale linea argomentativa. L' *à priori* , come abbiamo detto più volte, è ciò che è necessario per la possibilità dell'esperienza, e in questo abbiamo un criterio puramente logico, che fornisce risultati che solo la logica e l'epistemologia possono provare o confutare. Ciò che è soggettivo nell'esperienza, al contrario, è principalmente una questione di psicologia e dovrebbe essere deciso esclusivamente su basi psicologiche. Quando a queste due questioni saranno state date risposte separate, ma non prima, potremo formulare teorie sul legame tra l' *à priori* e il soggettivo; permettere che tali teorie influenzino la nostra decisione, su una qualsiasi delle due questioni precedenti, rischia certamente di confondere la questione e di impedire una chiara distinzione tra punti di vista fondamentalmente diversi.

194. Passo ora alla seconda questione di cui questo capitolo ha trattato, ovvero: cosa dobbiamo fare con le contraddizioni che si sono presentate nel CapitoloIII,ogni volta che giungevamo a un punto che sembrava fondamentale? Tratterò brevemente questa questione, poiché ho poco da aggiungere alle risposte che già conosciamo. Devo solo dimostrare, in primo luogo, che le contraddizioni sono inevitabili e quindi non costituiscono un'obiezione alla mia argomentazione; in secondo luogo, che il primo passo per eliminarle è ripristinare la nozione di materia, come ciò che, nei dati della percezione sensoriale, è localizzato e interrelato nello spazio.

195. Le contraddizioni nello spazio sono un tema antico, antico quanto la confutazione del moto di Zenone. Sono, in linea di massima, di due tipi, sebbene non sia possibile distinguerle nettamente. Vi sono le contraddizioni inerenti alla nozione di continuum e le contraddizioni che derivano dal fatto che lo spazio, pur dovendo, per essere conoscibile, essere pura relatività, deve anche, apparentemente, poiché viene sperimentato immediatamente, essere qualcosa di più di una semplice relazione. La prima classe di contraddizioni è stata incontrata più frequentemente in questo saggio ed è anche, a mio avviso, la più definita e la più importante per il nostro scopo attuale. Dubito, tuttavia, che le due classi siano realmente distinte; poiché credo che qualsiasi continuum, in cui gli elementi non siano dati, ma costruzioni intellettuali risultanti dall'analisi, possa dimostrare di possedere lo stesso carattere relazionale e al tempo stesso non del tutto relazionale che caratterizza lo spazio.

Le tre contraddizioni che seguiranno, e che analizzerò una dopo l'altra, mi sembrano le più evidenti in una teoria della geometria.

(1) Sebbene le parti dello spazio siano intuitivamente distinguibili, nessuna concezione è adeguata a differenziarle. Ne consegue una vana ricerca di elementi, mediante i quali si potrebbe realizzare la differenziazione, e di un tutto, di cui le parti dello spazio dovrebbero essere componenti. Così otteniamo il punto, o estensione zero, come elemento spaziale, e un regresso infinito o un circolo vizioso nella ricerca di un tutto.

(2) Poiché tutte le posizioni sono relative, esse possono essere definite solo dalle loro relazioni, *cioè* dalle rette o dai piani che le attraversano; ma le rette e i piani, essendo tutti

qualitativamente simili, possono essere definiti solo dalle posizioni che rappresentano. Quindi, ancora una volta, si crea un circolo vizioso.

(3) Le figure spaziali devono essere considerate come relazioni. Ma una relazione è necessariamente indivisibile, mentre le figure spaziali sono necessariamente divisibili *all'infinito* .

196. (1)*Punti.* L'antinomia del punto, che si presenta ovunque sia dato un continuum e in esso si debbano cercare degli elementi, è fondamentale per la geometria. È stata data, forse involontariamente, da Veronese come primo assioma, nella forma: "Ci sono punti diversi. Tutti i punti sono identici" (*op. cit.*p. 226). Abbiamo visto, discutendo la geometria proiettiva, che le linee rette e i piani devono essere considerati, da un lato, come relazioni tra punti, e dall'altro come costituiti dapunti[190] . Abbiamo visto ancora, trattando la misurazione, come lo spazio debba essere considerato infinitamente divisibile, eppure come mera relatività. Ma ciò che è divisibile e consiste di parti, come lo spazio, deve condurre infine, mediante un'analisi continua, a una parte semplice e inanalizzabile, come unità di differenziazione. Poiché tutto ciò che può essere diviso e ha parti possiede una certa sostanza, deve quindi contenere due unità ultime, ovvero il tutto e il più piccolo elemento dotato di sostanza. Ma nello spazio questo notoriamente non è il caso. Dopo aver ipostatizzato lo spazio, come la geometria è costretta a fare, la mente esige imperiosamente elementi e insiste per averli, che siano possibili o meno. Di questa esigenza sono tutte le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale[191] . Ma che tipo di elementi otteniamo così? L'analisi, non essendo in grado di trovare alcun punto di arresto precedente, trova i suoi elementi nei punti, cioè nei quanti zero dello spazio. Tale concezione è una palese contraddizione, resa tollerabile solo dalla sua necessità e familiarità. Un punto deve essere spaziale, altrimenti non adempirebbe alla funzione di elemento spaziale; ma ancora una volta non deve contenere spazio, poiché qualsiasi estensione finita è suscettibile di ulteriore analisi. I punti non possono mai essere dati per intuizione, che non ha a che fare con l'infinitesimale: sono una costruzione puramente concettuale, che nasce dalla necessità di termini tra i quali possano sussistere relazioni spaziali. Se lo spazio è più della relatività, le relazioni spaziali devono implicare relata spaziali; manessunarelata appare finché non abbiamo analizzato i nostri dati spaziali fino a ridurli al nulla. La nozione contraddittoria del punto, come cosa nello spazio priva di grandezza spaziale, è l'unico risultato della nostra ricerca di relata spaziali. Questa*reductio ad absurdum*è certamente sufficiente, di per sé, a dimostrare l'essenziale relatività dello spazio.

197. La geometria, volendo considerare lo spazio come indipendente, è quindi costretta a ipostatizzare le sue astrazioni e a inventare una nozione contraddittoria come elemento spaziale. Un'assurdità simile appare, in modo ancora più evidente, nella nozione di un intero spazio. L'antinomia può quindi essere formulata così: lo spazio, come abbiamo visto finora, affinché sia possibile conoscerlo, deve essere mera relatività; ma deve anche, affinché sia possibile*indipendente*di esso, come quella che la geometria si propone di ottenere, essere qualcosa di più della mera relatività, poiché è divisibile e ha parti. Ma abbiamo visto, nel

capitolo III , sezione A (§ 133), chela conoscenza di una forma di esteriorità deve essere logicamente indipendente dalla materia particolare che riempie la forma. Come possiamo dunque uscire da questo dilemma?

L'unico modo, a mio avviso, è non rendere la geometria dipendente dalla fisica, cosa che abbiamo visto essere errata [192] , ma dare a ogni proposizione geometrica un certo riferimento alla materia in generale. E a questo punto occorre fare un'importante distinzione. Finora abbiamo parlato di spazio come relazionale e di figure spaziali come relazioni. Ma lo spazio, a quanto pare, è più relatività che relazioni: non è esso stesso una relazione, ma dà la mera possibilità di relazioni tra cose diverse [193] . Applicato a una figura spaziale, che può sorgere solo mediante una differenziazione dello spazio, e quindi mediante l'introduzione di una qualche materia differenziante, il termine relazione è forse meno fuorviante di qualsiasi altro; applicato a uno spazio vuoto indifferenziato, non sembra affatto una descrizione accurata.

Ma una mera possibilità non può esistere, né essere data nella percezione sensoriale! Che ne è, dunque, degli argomenti della prima parte di questo capitolo? Rispondo che non è lo spazio vuoto, bensì le figure spaziali, che la percezione sensoriale rivela, e le figure spaziali, come abbiamo appena visto, implicano una differenziazione dello spazio, e quindi un riferimento alla materia che è nello spazio. Sono le figure spaziali, e non lo spazio vuoto, di cui la geometria deve occuparsi. L'antinomia discussa sopra nasce dunque – a quanto pare – dal tentativo di trattare lo spazio vuoto, piuttosto che le figure spaziali e la materia a cui esse necessariamente si riferiscono.

198. Vediamo se, con questo cambiamento, possiamo superare l'antinomia del punto. Le figure spaziali, diremo ora, sono relazioni tra la materia che differenzia lo spazio vuoto. La loro divisibilità, che sembrava contraddire il loro carattere relazionale, può essere spiegata in due modi: primo, come possesso delle figure considerate come parti dello spazio vuoto, che di per sé non è una relazione; secondo, come denotazione della possibilità di un cambiamento continuo nella relazione espressa dalla figura spaziale. Questi due modi sono, in fondo, gli stessi; poiché lo spazio vuoto è una possibilità di relazioni, e la figura, quando vista in connessione con lo spazio vuoto, diventa quindi una*possibile* relazione, con la quale altre possibili relazioni possono essere contrapposte o confrontate. Ma il secondo modo di considerare la divisibilità è il migliore, poiché introduce un riferimento alla materia che differenzia lo spazio vuoto, senza la quale le figure spaziali, e quindi la geometria, non potrebbero esistere. È lo spazio vuoto, dunque – dobbiamo concludere – che dà origine all'antinomia in questione; Lo spazio vuoto è una mera possibilità di relazioni, indifferenziata e omogenea, e quindi totalmente priva di parti o di sostanza. Parlare di parti di una possibilità è un nonsenso; le parti e le differenziazioni emergono solo in riferimento alla materia che si differenzia nello spazio.

199. Ma quale natura dobbiamo attribuire a questa materia, che sarà coinvolta in tutte le proposizioni geometriche? Nel criticare Helmholtz (Cap . II, § 73) , si ricorderà, abbiamo stabilito che la geometria si riferisce a un tipo di materia peculiare e astratta, che non è considerata dotata di qualità causali, né esercitante o soggetta all'azione di forze. Ed è questa

la materia, credo, di cui abbiamo bisogno per le esigenze del momento. Non che affermiamo, naturalmente, che la materia reale possa essere priva delle proprietà di cui la fisica è a conoscenza, ma che astraiamo da queste proprietà, in quanto irrilevanti per la geometria. Tutto ciò di cui abbiamo bisogno, per il nostro scopo immediato, è un soggetto di quella diversità che lo spazio rende possibile, o termini per quelle relazioni mediante le quali lo spazio vuoto, se lo spazio deve essere studiato, deve essere differenziato. Ma come si deve considerare una materia che deve assolvere a questa funzione?

Lo spazio vuoto, abbiamo detto, è una possibilità di diversità nelle relazioni, ma le figure spaziali, di cui la geometria si occupa necessariamente, sono le relazioni effettive rese possibili dallo spazio vuoto. La nostra materia, quindi, deve fornire i termini per queste relazioni. Essa deve essere differenziata, poiché tale differenziazione, come abbiamo visto, è il lavoro speciale dello spazio. Dobbiamo quindi trovare nella nostra materia quell'unità di differenziazione, o atomo [194] , che nello spazio non potremmo trovare. Questo atomo deve essere semplice, *cioè* non deve contenere alcuna diversità reale; deve essere un *Questo* non risolvibile in *Questi* . Essendo semplice, non può contenere relazioni al suo interno e, di conseguenza, poiché le figure spaziali sono mere relazioni, non può apparire come una figura spaziale; poiché ogni figura spaziale implica una qualche diversità di materia. Ma il nostro atomo deve avere relazioni spaziali con altri atomi, poiché fornire termini per queste relazioni è la sua unica funzione. È anche capace di avere queste relazioni, poiché è differenziato dagli altri atomi. Quindi otteniamo un termine non esteso per le relazioni spaziali, precisamente del tipo che ci serve. Fintanto che abbiamo cercato questo termine senza fare riferimento ad altro che allo spazio, la nozione contraddittoria di punto è stata l'unico risultato della nostra ricerca; ma ora che ammettiamo un riferimento alla materia differenziata dallo spazio, troviamo subito il termine che ci serviva, ovvero un elemento semplice non spaziale, con relazioni spaziali con altri elementi. Per la geometria, un tale termine apparirà, a causa delle sue relazioni spaziali, come un punto; ma la contraddizione del punto, come ora vediamo, è solo il risultato dell'eccessiva astrazione con cui la geometria si occupa.

200. (2)*Il cerchio nella definizione di linee rette e piani.*Questa difficoltà non ci tratterrà a lungo, poiché abbiamo già, con l'atomo materiale, infranto la relatività che ha generato il nostro cerchio. Le linee rette, nel procedimento puramente geometrico, sono definite solo da punti, e i punti solo da linee rette. Ma ora i punti sono sostituiti da atomi materiali: la dualità di punti e linee, quindi, è scomparsa, e la linea retta può essere definita come la relazione spaziale tra due atomi non estesi. Questi atomi hanno aggettivi spaziali, derivati dalle loro relazioni con altri atomi; ma non hanno*intrinseci*, come potrebbero appartenere loro se avessero estensione o figura. Così le linee rette e i piani sono le vere unità spaziali, e i punti derivano solo dal tentativo di trovare, nello spazio, quei termini per le relazioni spaziali che esistono soloin unamateria più che spaziale. Linee rette, piani e volumi rappresentano le relazioni spaziali tra due, tre o quattro atomi non estesi, e i punti sono una mera e comoda finzione geometrica, con cui vengono sostituiti i possibili atomi. Infatti, poiché lo spazio, come abbiamo visto, è una possibilità, la geometria non si occupa delle relazioni spaziali effettivamente realizzate, ma dell'intero schema delle relazioni possibili.

201. (3)*Lo spazio è allo stesso tempo relazionale e più che relazionale.*Abbiamo già accennato alla questione di quanto lo spazio sia diverso dalle relazioni, ma poiché questa questione è piuttosto fondamentale, poiché*relazione*è una parola ambigua e pericolosa, poiché ho fatto un uso costante della relatività dello spazio senza tentare di definire una relazione, sarà necessario discutere a lungo questa antinomia.

202. Ora, per questa discussione, è essenziale distinguere chiaramente tra spazio vuoto e figure spaziali. Lo spazio vuoto, come forma di esteriorità, non è costituito da relazioni attuali, ma dalla possibilità di relazioni: se gli attribuiamo un significato esistenziale, come fondamento, nella realtà, di ogni diversità relazionale, abbiamo subito lo spazio come qualcosa che non è esso stesso relazione, pur dando la possibilità di tutte le relazioni. In questo senso, lo spazio va distinto dall'ordine spaziale. L'ordine spaziale, si può dire, presuppone lo spazio, come ciò in cui questo ordine è possibile. Cosìafferma Stumpf [195] : "Non c'è ordine o relazione senza un contenuto assoluto positivo, che lo sottende e rende possibile ordinare qualcosa in questo modo. Perché e come dovremmo altrimenti distinguere un ordine da un altro?... Per distinguere ordini diversi l'uno dall'altro, dobbiamo ovunque riconoscere un particolare contenuto assoluto, in relazione al quale l'ordine si realizza. E così anche lo spazio non è un mero ordine, ma proprio ciò mediante il quale l'ordine spaziale, la vicinanza (*Nebeneinander*), si distingue dal resto."

Non potremmo dunque risolvere l'antinomia in modo molto semplice, facendo riferimento a questa ambiguità dello spazio? Bradley sostiene (Appearance and Reality, pp. 36-37) che, da un lato, lo spazio ha delle parti, e quindi non è costituito da mere relazioni, mentre dall'altro, quando cerchiamo di definire quali siano queste parti, scopriamo che in fin dei conti sono mere relazioni. Ma non si potrebbe considerare lo spazio che ha delle parti come spazio vuoto, il contenuto assoluto sottostante di Stumpf, che non è costituito da mere relazioni, mentre le parti, nella misura in cui si rivelano essere mere relazioni, sono quelle relazioni che costituiscono l'ordine spaziale, non lo spazio vuoto? Se ciò fosse possibile, l'antinomia non esisterebbe più.

Ma una simile spiegazione, sebbene io creda sia un primo passo verso una soluzione, temo che richiederà a sua volta quasi altrettante spiegazioni quanto la difficoltà originaria. Infatti, il nesso tra spazio vuoto e ordine spaziale è di per sé una questione complessa, che troverà risposta solo dopo molto lavoro.

203. Consideriamo cosa sia questo spazio vuoto. (Parlo di spazio "vuoto" senza necessariamente implicare l'assenza di materia, ma solo per indicare uno spazio che non è un mero ordine di cose materiali.) Stumpf lo considera dato nel senso; Kant, negli ultimi due argomenti della sua deduzione metafisica, sostiene che sia un'intuizione, non un concetto, e che debba essere conosciuto prima che l'ordine spaziale diventi possibile. Io intendo sostenere, al contrario, che sia interamente concettuale; che lo spazio sia dato solo come ordine spaziale; che le relazioni spaziali, essendo date, appaiano come qualcosa di più di semplici relazioni, e quindi si ipostatizzano; che, una volta ipostatizzate, l'intera collezione di esse è considerata contenuta nello spazio vuoto; ma che questo spazio vuoto stesso, se

significa qualcosa di più della possibilità logica delle relazioni spaziali, è un'assunzione superflua e contraddittoria. Iniziamo considerando gli argomenti di Kant su questo punto.

Leibniz aveva affermato che lo spazio era solo fatto di relazioni, mentre Newton aveva sostenuto la realtà oggettiva dello spazio assoluto. Kant adottò una via di mezzo: affermò lo spazio assoluto, ma lo considerò puramente soggettivo. L'affermazione dello spazio assoluto è l'oggetto del suo secondo argomento; infatti, se lo spazio fosse solo un insieme di relazioni tra le cose, scomparirebbe necessariamente con la scomparsa delle cose in esso contenute; ma questo il secondo argomento nega [196] . Ora, l'ordine spaziale ovviamente scompare con la materia, ma si può supporre che lo spazio assoluto o vuoto rimanga. È di questo, dunque, che Kant sta argomentando, ed è questo che egli afferma essere una pura intuizione, necessariamente presupposta dall'ordine spaziale [197] .

204. Ma possiamo concordare nel considerare lo spazio vuoto, l'"infinito dato tutto", come realmente dato? Non dobbiamo forse, nonostante l'argomentazione di Kant, considerarlo interamente concettuale? In primo luogo, ciò non è richiesto dall'argomentazione della prima parte di questo capitolo, che richiedeva solo che ogni*Questo*della percezione sensoriale fosse risolvibile in*Questi*, e quindi implicava solo un ordine tra*i Questi*, non qualcosa di dato originariamente senza alcun riferimento ad essi. In secondo luogo, i dueargomenti di Kant [198] volti a dimostrare che lo spazio vuoto non è concettuale, sono inadeguati al loro scopo. L'argomento secondo cui le parti dello spazio non sono contenute*sotto*di esso, ma *in*esso, dimostra certamente che lo spazio non è una concezione generale, di cui le figure spaziali sono gli esempi; ma non ne consegue affatto che lo spazio vuoto non sia una concezione. Lo spazio vuoto è indifferenziato e omogeneo; le parti dello spazio, o figure spaziali, sorgono solo in riferimento a una qualche materia differenziante, e quindi appartengono più all'ordine spaziale che allo spazio vuoto. Se lo spazio vuoto è la precondizione dell'ordine spaziale, non possiamo aspettarci che sia connesso alle relazioni spaziali come il genere con la specie. Ma lo spazio vuoto può comunque essere una concezione universale; può essere correlato all'ordine spaziale come lo stato ai cittadini. Questi non sono esempi dello stato, ma sono contenuti in esso; inoltre,in un certosenso, lo presuppongono, poiché un uomo può diventare cittadino solo essendo in relazione con altri cittadiniin uno stato [199] .

L'unicità dello spazio, ancora una volta, sembra difficilmente un argomento valido per la sua natura intuitiva; considerarla un argomento implica, infatti, che tutte le concezioni siano astratte da una serie di casi – una visione che è stata criticata nel Capitolo II (§ 77) e non necessita di ulteriori discussioni qui [200] . Non vi è quindi alcun fondamento nei due argomenti di Kant a favore della natura intuitiva dello spazio vuoto, che possa essere difeso dalle critiche.

205. Un altro motivo per condannare lo spazio vuoto si trova nelle antinomie matematiche. Infatti, come sottolinea Lotze (Metafisica, LibroII,CapitoloI, § 106), non è una soluzione considerare lo spazio vuoto come puramente soggettivo: le contraddizioniin un'intuizione soggettiva necessaria costituiscono una difficoltà tanto grande quanto in

qualsiasi altra cosa. Ma queste antinomie sorgono solo in relazione allo spazio vuoto, non all'ordine spaziale come aggregato di relazioni. Infatti, solo quando lo spazio è considerato come dotato di una qualche sostanza, si può esigere un intero o un vero elemento. Questo lo abbiamo già visto in relazione al Punto. Quando lo spazio è considerato, per quanto sia valido, come solo ordine spaziale, scompaiono sia l'estensione illimitata che l'infinita divisibilità. Ciò che viene diviso non sono le relazioni spaziali, ma la materia; e se la materia, come abbiamo visto che la Geometria richiede, consiste di atomi non estesi con relazioni spaziali, non c'è motivo di considerare la materia né infinitamente divisibile, né come composta da atomi di estensione finita.

206. Ma da dove nasce, secondo questa visione, il paradosso per cui non possiamo considerare lo spazio come avente più o meno cosmesi, e come divisibile*all'infinito*? Questo deve essere spiegato, credo, come un'illusione psicologica, che deriva inevitabilmente dal fatto che le relazioni spaziali sono presentate immediatamente. Esse hanno quindi una peculiare qualità psichica, come esperienze immediate, per cui possono essere distinte dalle relazioni temporali o da qualsiasi altro ordine in cui le cose possono essere disposte. Per Stumpf, il cui problema è psicologico, una tale qualità psichica costituirebbe un contenuto sottostante assoluto e giustificherebbe pienamente la sua tesi; per noi, invece, il cui problema è epistemologico, non lo farebbe, ma lascerebbe il*significato*dell'elemento spaziale nella percezione sensoriale libero da qualsiasi implicazione di unospazio assoluto o vuoto [201] . Non dovremmo dunque abbandonare lo spazio vuoto e affermare: l'ordine spaziale consiste in relazioni*percepiteciò che*è percepito ha, per la psicologia, un'esistenza non interamente risolvibile in relazioni, e inevitabilmente*sembra*essere qualcosa di più di semplici relazioni. Ma quando esaminiamo le informazioni sullo spazio che ricaviamo dalla percezione sensoriale, ci troviamo immersi in contraddizioni, non appena ammettiamo che queste informazioni consistano in qualcosa di più di semplici relazioni. Questo lascia l'ordine spaziale isolato e riduce lo spazio vuoto a un mero nome per la possibilità logica di relazioni spaziali.

207. L'apparente divisibilità delle relazioni che costituiscono l'ordine spaziale può dunque essere spiegata in due modi, sebbene in fondo siano equivalenti. Possiamo considerare la relazione in relazione allo spazio vuoto, nel qual caso essa diventa più di una semplice relazione; ma essendo falsamente ipostatizzata, appare come una cosa complessa, necessariamente composta da elementi, i quali, tuttavia, non emergono da nessuna parte finché non analizziamo la pseudo-cosa fino a ridurla a nulla, e arriviamo al punto. In questo senso, la divisibilità delle relazioni spaziali è un'illusione inevitabile. Oppure, possiamo considerare la relazione in relazione agli atomi materiali che essa mette in relazione. In questo caso, si possono immaginare altri atomi, localizzati diversamente da diverse relazioni spaziali. Se sono localizzati sulla linea retta che unisce due degli atomi originali, questa linea retta appare divisa da essi. Ma la relazione originale non è realmente divisa: tutto ciò che è accaduto è che due o più relazioni equivalenti l'hanno sostituita, come due relazioni composte di padre e figlio possono sostituire la relazione equivalente di nonno e nipote.

Questi due modi di considerare l'apparente divisibilità sono equivalenti: lo spazio vuoto, nella misura in cui non è un'illusione, è un nome per l'insieme delle possibili relazioni spaziali. Considerare una figura nello spazio vuoto come divisa, quindi, significa, se ha un significato, considerare due o più altre possibili relazioni come sostitutive di essa, il che fornisce il secondo modo di considerare la questione.

Lo stesso riferimento alla materia, dunque, con cui è stata risolta l'antinomia del Punto, risolve anche l'antinomia relativa alla natura relazionale dello spazio. Lo spazio, per essere liberato dalle contraddizioni, deve essere considerato esclusivamente come ordine spaziale, come relazioni tra atomi materiali non estesi. Lo spazio vuoto, che emerge, per un'inevitabile illusione, dall'elemento spaziale nella percezione sensoriale, può essere considerato, se vogliamo conservarlo, come il puro principio di relatività, la mera possibilità logica di relazioni tra cose diverse. In questo senso, lo spazio vuoto è interamente concettuale; solo l'ordine spaziale viene immediatamente esperito.

208. Ma in che senso l'ordine spaziale consiste di relazioni? Finora abbiamo parlato di esteriorità come di una relazione, ein un certosenso questo modo di esprimersi è giustificato. L'esteriorità, quando si predica qualcosa, è un aggettivo di quella cosa e implica un riferimento a qualcos'altro. In questo senso, quindi, l'esteriorità è analoga ad altre relazioni; e solo in questo senso, nelle nostre argomentazioni precedenti, è stata considerata una relazione. Ma quando prendiamo in considerazione ulteriori qualità delle relazioni, l'esteriorità comincia ad apparire non tanto come una relazione, quanto piuttosto come un aspetto o un elemento necessario in ogni relazione. E ciò è confermato dalla necessità, per l'esistenza delle relazioni, di una data forma di esteriorità.

Ogni relazione, possiamo affermare, implica una diversità tra i termini correlati, ma anche una certa unità. La mera diversità non fornisce il fondamento per quell'interazione e quell'interdipendenza che una relazione richiede. La mera unità lascia i termini identici, distruggendo così il riferimento reciproco necessario per una relazione. La mera esteriorità, intesa in astratto, fornisce solo l'elemento di diversità richiesto per una relazione, ed è quindi più astratta di qualsiasi relazione reale. Ma la mera diversità non fornisce quell'insieme indivisibile di cui deve essere composta qualsiasi relazione reale, e quindi, se considerata in astratto, non è soggetta alle restrizioni delle relazioni ordinarie.

Ma con la mera diversità, sembra che siamo tornati allo spazio vuoto, abbandonando l'ordine spaziale. La mera diversità, certamente, è o completa o inesistente; i gradi di diversità, o una sua misura quantitativa, sono privi di senso. Non possiamo, quindi, ridurre l'ordine spaziale alla mera diversità. Due cose, se occupano posizioni diverse nello spazio, sono necessariamente diverse, ma sono altrettanto necessariamente qualcosa di più; altrimenti l'ordine spaziale perde di significato.

Lo spazio vuoto, dunque, nel senso di cui sopra inteso come possibilità di relazioni spaziali, contiene un solo aspetto di una relazione, ovvero l'aspetto della diversità; ma l'ordine spaziale, grazie al suo riferimento alla materia, diventa più concreto e contiene anche

l'elemento di unità, derivante dalla connessione dei diversi atomi materiali. L'ordine spaziale, quindi, consiste di relazioni nel senso ordinario del termine; il suo elemento meramente spaziale, tuttavia – se si può fare tale distinzione – l'elemento, cioè, che può essere astratto dalla materia e considerato come costituente lo spazio vuoto, è solo un aspetto di una relazione, ma un aspetto che, nel concreto, deve essere inseparabilmente legato all'altro aspetto. Qui, ancora una volta, vediamo il fondamento delle contraddizioni nello spazio vuoto e la ragione per cui l'ordine spaziale è esente da tali contraddizioni.

Conclusione.

209. Abbiamo ora completato il nostro ripasso dei fondamenti della geometria. Prima di congedarci dall'argomento, è opportuno riepilogare brevemente i risultati ottenuti.

Nel primo capitolo abbiamo osservato lo sviluppo di una branca della matematica, inizialmente concepita unicamente per stabilire l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele di Euclide e la possibilità di una geometria autoconsistente che ne fosse esente. Abbiamo poi constatato che l'ulteriore sviluppo della materia si è intrecciato, per un certo periodo, con controversie filosofiche; dopo aver dimostrato la superfluità di un assioma, i geometri del secondo periodo speravano di dimostrare la stessa conclusione per tutti gli altri, ma non sono riusciti a costruire alcun sistema libero da tre assiomi fondamentali. Essendo interessati alla geometria analitica e metrica, tendevano a considerare l'algebra come *qualcosa di preesistente* , ma sostenevano che le proprietà delle grandezze spaziali, non deducibili dalle leggi dell'algebra, dovessero essere empiriche. In tutto ciò, il loro obiettivo era tanto quello di screditare Kant quanto quello di far progredire la matematica. Ma con il terzo periodo, l'interesse per la filosofia diminuisce, l'opposizione a Euclide si attenua e, soprattutto, la misurazione non è più considerata fondamentale e lo spazio viene trattato con metodi descrittivi piuttosto che quantitativi. Ciononostante, tre assiomi, sostanzialmente gli stessi di quelli mantenuti nel secondo periodo, sono ancora condivisi da tutti i geometri.

Nel secondo capitolo, abbiamo cercato, attraverso una critica di alcune filosofie geometriche, di preparare il terreno per una teoria costruttiva della geometria. Abbiamo visto che Kant, applicando l'argomento dell'estetica trascendentale allo spazio, si era spinto troppo oltre, poiché la sua portata logica si estendeva solo a una qualche forma di esteriorità in generale. Abbiamo visto che Riemann, Helmholtz ed Erdmann, fuorviati dal pregiudizio quantitativo, trascurarono il substrato qualitativo richiesto da tutti i giudizi di quantità, e quindi fraintesero la direzione in cui si trovano gli assiomi necessari della geometria. Abbiamo anche respinto la tesi di Helmholtz secondo cui la geometria dipende dalla fisica, perché abbiamo constatato che la fisica deve presupporre una conoscenza della geometria prima di poter essere possibile. Tuttavia, abbiamo ammesso, nella geometria, un riferimento alla materia – non, però, alla materia come conosciuta empiricamente in fisica, ma a una materia più astratta, la cui unica funzione è quella di apparire nello spazio e fornire i termini per le relazioni spaziali. Abbiamo ammesso, tuttavia, che ogni misurazione *effettiva* deve essere effettuata per mezzo di materia *reale* ed è possibile empiricamente solo attraverso la conoscenza empirica di corpi approssimativamente rigidi. Nel criticare Lotze, abbiamo visto

che il senso più importante in cui gli spazi non euclidei sono possibili è un senso filosofico, vale a dire che non sono condannati da alcun argomento *a priori* sulla necessità dello spazio per l'esperienza e che, di conseguenza, se non vengono affermati, ciò deve essere basato esclusivamente su motivi empirici. Abbiamo constatato che le critiche di Lotze sulla procedura matematica della Metageometria erano interamente dovute all'ignoranza della materia.

Procedendo, nel terzo capitolo, a una teoria costruttiva della geometria, abbiamo visto che la geometria proiettiva, che non fa riferimento alla quantità, è necessariamente vera per qualsiasi forma di esternalità. I suoi tre assiomi – omogeneità, dimensioni e retta – sono stati tutti dedotti dalla concezione di una forma di esternalità e, poiché una tale forma è necessaria per l'esperienza, sono stati tutti dichiarati *a priori* . Nella geometria metrica, al contrario, abbiamo trovato un elemento empirico, derivante dalle alternative tra spazio euclideo e non euclideo. Tre assiomi *a priori* , comuni a questi spazi e condizioni necessarie per la possibilità di misurazione, rimanevano comunque validi: l'assioma della libera mobilità, l'assioma che lo spazio ha un numero finito e intero di dimensioni e l'assioma della distanza. Fatta eccezione per la nuova idea di movimento, questi si sono rivelati equivalenti alla triade proiettiva e quindi necessariamente veri per qualsiasi forma di esternalità. Ma gli assiomi rimanenti di Euclide – l'assioma delle tre dimensioni, l'assioma secondo cui due rette non possono mai racchiudere uno spazio e l'assioma delle parallele – erano considerati leggi empiriche, derivate dall'indagine e dalla misurazione del nostro spazio reale, e vere, per quanto riguarda gli ultimi due, solo entro i limiti imposti dagli errori di osservazione.

Nel presente capitolo abbiamo completato la dimostrazione dell'apriorità degli assiomi metrici proiettivo ed equivalente, mostrando la necessità, per l'esperienza, di una qualche forma di esternalità, data dalla sensazione o dall'intuizione, e non semplicemente dedotta da altri dati. Senza di essa, abbiamo affermato, la conoscenza di cose diverse ma interrelate, pietra angolare di ogni esperienza, sarebbe impossibile. Infine, abbiamo discusso le contraddizioni derivanti dalla relatività e dalla continuità dello spazio, e abbiamo cercato di superarle facendo riferimento alla materia. Questa materia, abbiamo scoperto, deve essere costituita da atomi non estesi, localizzati dalle loro relazioni spaziali, e che appaiono, in geometria, come punti. Ma gli aggettivi non spaziali della materia, abbiamo sostenuto, sono irrilevanti per la geometria, e le sue proprietà causali possono essere tralasciate. Per affrontare le nuove contraddizioni, implicate in una tale nozione di materia, sarebbe necessario un nuovo trattato, che ci condurrebbe, attraverso la cinematica, nei domini della dinamica e della fisica. Ma discutere delle particolari difficoltà legate allo spazio è tutto ciò che è possibile fare in un saggio sui fondamenti della geometria.

NOTE A PIÈ DI PAGINA:

[178] Confronta, con i paragrafi seguenti, l'ammirevole discussione contenuta nella Teoria della conoscenza del signor Hobhouse (Methuen 1896), Parte I , Capitolo II.

[179] Parlo di percezione sensoriale invece che di sensazione, per non pregiudicare la questione riguardo alla natura sensoriale dello spazio.

[180] Cfr. il Commento di Vaihinger, II. pp. 86–7, 168–171.

[181] Vedi Caird, Filosofia critica di Kant, Vol. I, p. 287.

[182] Ursprung der Raumvorstellung, pp. 12-30.

[183] Cfr. i riferimenti nel Commentar di Vaihinger, II. P. 76 ss.

[184] Commento, II. P. 71 ss.

[185] *Ad esempio* , Caird, *op. cit*. Vol. I, p. 286.

[186] Non intendo tuttavia negare che lo spazio sia essenziale nella successiva distinzione tra Sé e non-Sé.

[187] Vedi anche Libro I. Cap. II. passim; in particolare p. 51 ss. e pp. 70–1.

[188] Logica, pag. 51 e segg.

[189] Per *questo* , in base a tale ipotesi, ha una complessità puramente temporale e non è risolvibile in *Questi* coesistenti .

[190] Capitolo III . Sezione A, (§ 131).

[191] Cfr. Hannequin, Essai critique sur l'hypothèse des atomes, Parigi 1895, cap. I. Sezione III. ; soprattutto pag. 43.

[192] Cfr . capitolo II . § 69 ss.

[193] Vedere la terza antinomia qui sotto, § 201 e seguenti.

[194] Questo atomo, ovviamente, non deve essere confuso con l'atomo della Chimica.

[195] Ursprung der Raumvorstellung, p. 15.

[196] Vedi il Commento di Vaihinger, II. pp. 189–190.

[197] Vedi ibid. p. 224 ss. per le incongruenze di Kant su questo punto.

[198] Il quarto e il quinto nella prima edizione, il terzo e il quarto nella seconda.

[199] Cfr. Commento di Vaihinger, II. P. 218.

[200] Cfr. Commento di Vaihinger, II. P. 207.

[201] Cfr. James, Psicologia, Vol. II , p. 148 ss.

Cambridge: STAMPATO DA J. E CF CLAY, PRESSO LA UNIVERSITY PRESS.